Lösung 9

1. *Konsistenz Expliziter Runge-Kutta Verfahren*

Gemäss Hinweis, berechnen wir

$$
\begin{aligned}
k_1(h) &= f(t_0 + c_1 h, y_0) = f(t_0, y_0) + c_1 h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + O(h^2) = f(t_0, y_0) + O(h), \\
k_2(h) &= f\Big(t_0 + \underbrace{c_2 h}_{\Delta t}, y_0 + \underbrace{a_{21} h k_1(h)}_{\Delta y}\Big) \\
&= f(t_0, y_0) + c_2 h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + a_{21} h k_1(0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + O(h^2) = f(t_0, y_0) + O(h), \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
k_i(h) &= f\Big(t_0 + \underbrace{c_i h}_{\Delta t}, y_0 + \underbrace{h \sum_{j=1}^{i} a_{ij} k_j(h)}_{\Delta y}\Big) \\
&= f(t_0, y_0) + h c_i \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \underbrace{k_j(0)}_{f(t_0,y_0)+O(h)} \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + O(h^2) \\
&= f(t_0, y_0) + O(h), \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
k_s(h) &= f\Big(t_0 + \underbrace{c_s h}_{\Delta t}, y_0 + \underbrace{h \sum_{j=1}^{s} a_{sj} k_j(h)}_{\Delta y}\Big) \\
&= f(t_0, y_0) + h c_s \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} \underbrace{k_j(0)}_{f(t_0,y_0)+O(h)} \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + O(h^2) \\
&= f(t_0, y_0) + O(h).
\end{aligned}
$$

Ein Schritt eines expliziten RK Verfahrens lautet dann

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i.$$

Aus $k_i(h) = f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h)$, erhalten wir

$$y_1 = y_0 + h \left(\sum_{i=1}^{s} b_i \right) (f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h)) = y_0 + h \left(\sum_{i=1}^{s} b_i \right) f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h^2).$$

Der Konsistenzfehler ist dann

$$\begin{aligned}
\frac{|y(h) - y_1|}{h} &= \frac{|y_0 + hf(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h^2) - y_1|}{h} \\
&= \frac{|y_0 + hf(t_0, y_0) - y_0 - h\left(\sum_{i=1}^{s} b_i\right) f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h^2))|}{h} \\
&= \left| \left(1 - \sum_{i=1}^{s} b_i \right) f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h) \right|.
\end{aligned}$$

Damit das Verfahren konsistent ist für alle hinreichend glatten f, muss gelten

$$\frac{|y(h) - y_1|}{h} \to 0 \quad (h \to 0).$$

Dies soll auch gelten für z.B. $f(t, y) = 1$. Dies ist nur möglich falls

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1.$$

Bemerkung: Aus obiger Darstellung folgt auch direkt, dass die Bedingung $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$ hinreichend ist für die Konsistenz eines expliziten RK Verfahrens.

2. *Toleranz Variieren*

a) Given

$$y(t) = \frac{t^2}{1 + t^2}, \tag{1}$$

we have

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \frac{1}{1 + t^2} \frac{d}{dt}\{t^2\} + t^2 \frac{d}{dt}\{\frac{1}{1 + t^2}\} \\
&= \frac{2t}{1 + t^2} - t^2 \frac{2t}{(1 + t^2)^2} \\
&= \frac{2t}{(1 + t^2)^2}.
\end{aligned}$$

Hence, (**??**) solves the given AWP problem.

Siehe nächstes Blatt!

b) See `tolVar.m`. We observe that the `ode45` solution diverges. The point of divergence is delayed as the tolerances become smaller.

c) The exact solution remains the same when $\lambda = -10$.

d) See `tolVar.m`. For $\lambda = -10$, we observe that `ode45` solution converges to the exact solution irrespective of the given absolute and relative tolerances.

e) Specifying the tolerances controls the time step size in `ode45`. The observations from b) and d) can be explained based on *Satz II.3* in lecture notes *Kap02_Notizen.pdf, page 40*.

Remark: The primary takeaway from this exercise is that one should not blindly trust the numerical solution provided by the integration schemes. Rather, perform simple tests, such as the one presented in this exercise, to verify their accuracy for your particular system.

3. *Zu Einfaches Adaptives Heun-Verfahren*

a) Die Implementierung finden Sie im kommentierten `adaptHeunSimple.m`.

b) Zunächst müssen wir die Van der Pol-Gleichung umschreiben in ein System erster Ordnung:

$$\begin{aligned}\dot{y}_0(t) &= y_1(t)\\ \dot{y}_1(t) &= 8(1 - y_0(t)^2)y_1(t) - y_0(t).\end{aligned}$$

Die Anfangswerte sind dann

$$y_0(0) = 2 \quad , \quad y_1(0) = 0.$$

In Abb. **??** werden die erhaltene Näherungslösung $y(t)$ (links) und die Schrittweitte h (rechts) gezeigt (erstellt mit `vanDerPol.m`). Wir beobachten, dass wenn die Lösung anfängt stärker zu variieren (bei Zeit ~ 7) reduziert der Algorithmus die Schrittweite sukzessiv. Anschliessend bleibt die Schrittweite konstant.

c) Der in der Aufgabe beschriebene weist (mindestens) zwei offensichtliche Schwächen auf:

1. Wenn die Schrittweite einmal verkleinert wurde, z.B. wenn die Lösung stark variiert, wird sie nicht mehr erhöht, z.B. wenn die Lösung weniger variiert.
2. Es könnte passieren, dass der Algorithmus die Schrittweite halbiert ohne jemals das Toleranz-Kriterium zu erreichen, z.B. wenn die Toleranzen sehr klein gewählt sind.

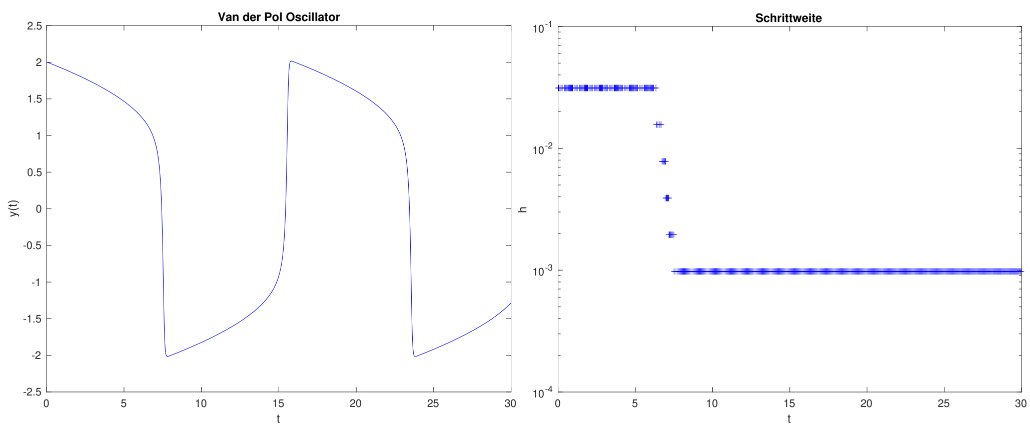

Abbildung 1 – Lösung $y(t)$ links und Schrittweitte h rechts.