

Lösung 12

1. Stabilitäts-funktionen und Gebiete

a) (i) Expliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + hf(t_j, y_j) \\ &= y_j + h\lambda y_j \\ &= (1 + h\lambda)y_j. \end{aligned}$$

Deshalb, für $z = h\lambda$, ist die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = 1 + z.$$

(ii) Impliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Wir haben

$$k_1 = f(t_j + h, y_j + hk_1) = \lambda(y_j + hk_1) = \lambda y_j + h\lambda k_1 \iff (1 - h\lambda)k_1 = \lambda y_j,$$

und daher

$$k_1 = y_j \left(\frac{\lambda}{1 - h\lambda} \right).$$

Dann

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + hk_1 \\ &= y_j + hy_j \left(\frac{\lambda}{1 - h\lambda} \right) \\ &= \left(1 + \frac{h\lambda}{1 - h\lambda} \right) y_j \\ &= \left(\frac{1}{1 - h\lambda} \right) y_j. \end{aligned}$$

Deshalb, für $z = h\lambda$, ist die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = \frac{1}{1-z}.$$

(iii) Heun Verfahren

0	
1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Wir haben

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2}(f(t_j, y_j) + f(t_j + h, y_j + hf(t_j, y_j))) \\ &= y_j + \frac{h}{2}(\lambda y_j + \lambda(y_j + h\lambda y_j)) \\ &= y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j + \frac{h^2}{2}\lambda^2 y_j \\ &= (1 + h\lambda + \frac{h^2}{2}\lambda^2)y_j. \end{aligned}$$

Deshalb, für $z = h\lambda$, ist die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2.$$

(iv) Klassisches Runge-Kutta Verfahren

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
1	0	0	1
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Wir haben

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, y_j) &&= \lambda y_j, \\ k_2 &= f(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1) &&= \lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j), \\ k_3 &= f(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2) &&= \lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j)), \\ k_4 &= f(t_j + h, y_j + hk_3) &&= \lambda(y_j + h\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j))). \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Dann

$$\begin{aligned}
 y_{j+1} &= y_j + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{6}k_2 + \frac{2}{6}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right) \\
 &= y_j + h\left(\frac{1}{6}\lambda y_j + h\frac{2}{6}\lambda\left(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j\right) + h\frac{2}{6}\lambda\left(y_j + \frac{h}{2}\lambda\left(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j\right)\right)\right. \\
 &\quad \left.+ h\frac{1}{6}\lambda\left(y_j + h\lambda\left(y_j + \frac{h}{2}\lambda\left(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j\right)\right)\right)\right) \\
 &= y_j + \frac{1}{6}h\lambda y_j + \frac{2}{6}h\lambda y_j + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 y_j + \frac{2}{6}h\lambda y_j + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 y_j + \frac{1}{12}h^3\lambda^3 y_j \\
 &\quad + \frac{1}{6}h\lambda y_j + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 y_j + \frac{1}{12}h^3\lambda^3 y_j + \frac{1}{24}h^4\lambda^4 y_j \\
 &= \left(1 + \frac{1}{6}h\lambda + \frac{2}{6}h\lambda + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 + \frac{2}{6}h\lambda + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 + \frac{1}{12}h^3\lambda^3\right. \\
 &\quad \left.+ \frac{1}{6}h\lambda + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 + \frac{1}{12}h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}h^4\lambda^4\right)y_j \\
 &= \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}h^4\lambda^4\right)y_j.
 \end{aligned}$$

Deshalb, für $z = h\lambda$, ist die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4.$$

(v) Implicit midpoint rule

$$\begin{array}{c|c}
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

Wir haben

$$k_1 = f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right) = \lambda\left(y_j + \frac{h}{2}k_1\right) = \lambda y_j + \frac{h}{2}\lambda k_1 \iff \left(1 - \frac{h}{2}\lambda\right)k_1 = \lambda y_j,$$

and hence

$$k_1 = y_j \left(\frac{\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda}\right) = y_j \left(\frac{2\lambda}{2 - h\lambda}\right).$$

Dann

$$\begin{aligned}
 y_{j+1} &= y_j + hk_1 \\
 &= y_j + hy_j \left(\frac{2\lambda}{2 - h\lambda}\right) \\
 &= \left(1 + \frac{2h\lambda}{2 - h\lambda}\right)y_j \\
 &= \left(\frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda}\right)y_j.
 \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Deshalb, für $z = h\lambda$, ist die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = \left(\frac{2+z}{2-z} \right).$$

b) Siehe `stabgebiete.m` und `draw_stabfunc.m`. Die Stabilitätsgebiete ist schwarz lackiert.

c) Wir benötigen:

(i) $|1+x| < 1 \iff -1 < 1+x < 1 \implies -2 < x < 0.$

(ii) $\left| \frac{1}{1-x} \right| < 1 \iff 1 < |1-x|.$
So

$$1 < 1-x \implies x < 0 \quad \text{und} \quad 1 < x-1 \implies x > 2.$$

(iii) $\left| 1+x+\frac{1}{2}x^2 \right| < 1 \iff 1+x+\frac{1}{2}x^2 < 1 \iff x(x+2) < 0 \implies -2 < x < 0.$

(iv) $\left| 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4 \right| < 1 \iff x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4 < 0.$

Siehe `stab_klassisches_RK.m`. Wir haben eine Null bei $x \approx -2.7853$ und es ist klar, dass $x = 0$ auch eine Null ist. Da $g(x)$ außerhalb dieser Region zunimmt, das gilt das Stabilitätsintervalle ist $-2.7853 < x < 0.$

(v) $\left| \frac{2+x}{2-x} \right| < 1 \iff |2+x| < |2-x|.$ Es ist klar gilt dies nur für $x < 0.$

d) Definiere

$$\lambda = -1000 + \pi i.$$

We want to determine h such that

$$|g(z)| = |g(h\lambda)| < 1, \quad \text{or equivalently} \quad |g(h\lambda)|^2 < 1.$$

(i) We have

$$g(h\lambda) = 1 + h\lambda.$$

Therefore, h should be such that

$$1 > |g(h\lambda)|^2 = |1 + h\lambda|^2 = |1 + h(-1000 + \pi i)|^2 = (1 - 1000h)^2 + (\pi h)^2.$$

Hence we require that

$$h < \frac{2000}{1000000 + \pi^2}.$$

Siehe nächstes Blatt!

(ii) We have

$$g(h\lambda) = \frac{1}{1 - h\lambda}. \quad (1)$$

Therefore, h should be such that

$$\begin{aligned} 1 > |g(h\lambda)|^2 &= \left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right|^2 = \left| \frac{1}{1 + 1000h - h\pi i} \cdot \frac{1 + 1000h + h\pi i}{1 + 1000h + h\pi i} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1 + 1000h}{(1 + 1000h)^2 + (h\pi)^2} + i \frac{-h\pi}{(1 + 1000h)^2 + (h\pi)^2} \right|^2 \\ &= \left(\frac{1 + 1000h}{(1 + 1000h)^2 + (h\pi)^2} \right)^2 + \left(\frac{-h\pi}{(1 + 1000h)^2 + (h\pi)^2} \right)^2 \\ &= \frac{(1 + 1000h)^2 + (h\pi)^2}{((1 + 1000h)^2 + (h\pi)^2)^2} \\ &= \frac{1}{(1 + 1000h)^2 + (h\pi)^2}. \end{aligned}$$

This holds when $h < -\frac{2000}{1000000 + \pi^2}$ or $h > 0$. As the step size must be positive this means we require that

$$h > 0.$$

(iii)-(v) First we rewrite the stability condition $|g_\lambda(h)| < 1$ as

$$G(h) := 1 - |g_\lambda(h)| > 0.$$

Then we use a root finding procedure to precisely locate the points where $G(h) = 0$. Siehe `grenzen_schrittweite_h.m`.

(iii) We require $h < 0.002$.

(iv) We require $h < 0.0028$.

(v) h can be any positive number.

e) Siehe `schnelle_oszillation_verfall.m` und *Abbildung 1*.

2. Lineares homogenes System

a) Diagonalisieren die Matrix A als:

$$A = PDP^{-1} \iff D = P^{-1}AP,$$

wo

$$P = \begin{bmatrix} 15 & -12 & 1 \\ 0 & 12 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -1000 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{4}{75} & \frac{1}{25} \\ 0 & \frac{3}{40} & \frac{1}{40} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}.$$

Bitte wenden!

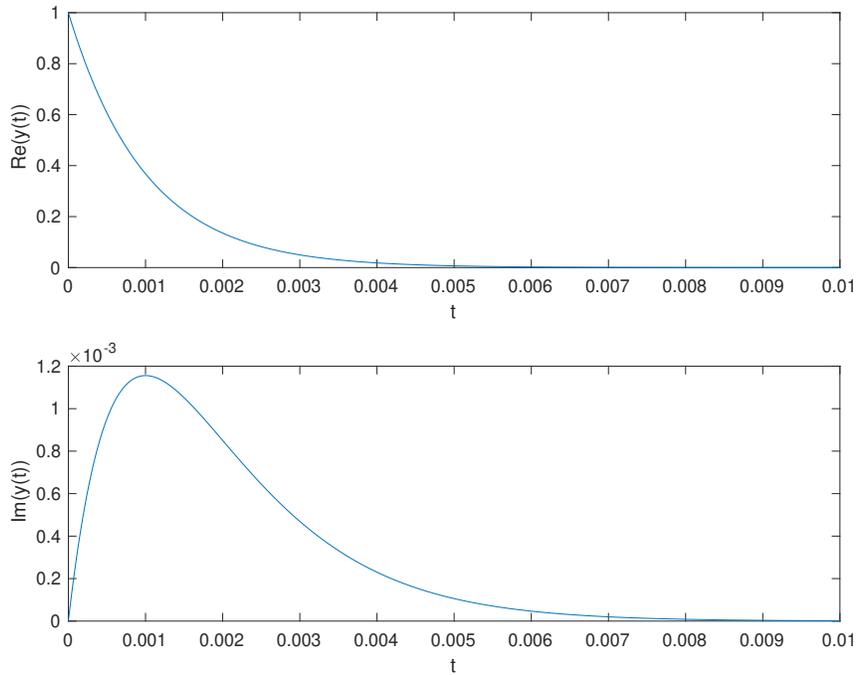


Abbildung 1 – Realteil und den Imaginärteil der Lösung $y(t)$ aus d).

Sei $\mathbf{z} = P^{-1}\mathbf{y} \iff \mathbf{y} = P\mathbf{z}$ und beachten Sie das

$$\dot{\mathbf{z}} = P^{-1}\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}A\mathbf{y} = P^{-1}AP\mathbf{z} = D\mathbf{z}.$$

Wir haben jetzt drei entkoppelte ODEs, wo die Lösung gegeben ist

$$z_i(t) = z_i(0)e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \dots, 3.$$

Wir haben

$$\mathbf{z}(0) = P^{-1}\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{4}{75} & \frac{1}{25} \\ 0 & \frac{3}{40} & \frac{1}{40} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{30} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Deshalb

$$z_1(t) = z_1(0)e^{\lambda_1 t} = \frac{14}{30}e^{-\frac{1}{2}t}.$$

$$z_2(t) = z_2(0)e^{\lambda_2 t} = \frac{1}{2}e^{-15t}.$$

$$z_3(t) = z_3(0)e^{\lambda_3 t} = 0e^{-1000t} = 0.$$

Dann ist gilt

$$\mathbf{y}(t) = P\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} 15 & -12 & 1 \\ 0 & 12 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{14}{30}e^{-\frac{1}{2}t} \\ \frac{1}{2}e^{-15t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7e^{-\frac{1}{2}t} - 6e^{-15t} \\ 6e^{-15t} \\ 2e^{-15t} \end{bmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

- b) Siehe `linsys.m`. Beachten Sie dass globale Diskretisierungsfehler divergiert, während die Schrittgröße größer ist als die maximal zulässige Schrittgröße aufgrund des Stabilitätsintervalle.

Für das verbesserte Euler-Verfahren haben wir

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_j, y_j) = \lambda y_j, \\k_2 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right) = \lambda\left(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j\right).\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}y_{j+1} &= y_j + hk_2 = y_j + h\lambda\left(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j\right) \\&= \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2\right)y_j\end{aligned}$$

Deshalb, für $z = h\lambda$, ist die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2.$$

Für $z = h\lambda$, von Teil 1.c) (iii). wir haben das

$$-2 < h\lambda < 0.$$

Das Worst-Case-Szenario ist, $\lambda = \lambda_3 = -1000$. Dann wir haben

$$-2 < h\lambda < 0 \iff 0 < 1000h < 2 \iff 0 < h < \frac{1}{500}.$$

Wenn wir im Stabilitätsintervall sind, d.h. $h < \frac{1}{500}$, konvergiert die Methode, und außerdem konvergiert sie mit der erwarteten Ordnung, die $p = 2$ ist. Siehe Abbildung 2.

Beachten Sie, dass die wahre Lösung $\mathbf{y}(t)$ nicht den $\lambda_3 = -1000$ Eigenwert enthält, was darauf hindeutet, dass wir es bei der numerischen Lösung für $\mathbf{y}(t)$ ignorieren können. Dies ist jedoch nicht der Fall, da die numerische Lösung nicht exakt ist und somit der Beitrag aus diesem Eigenwert die anderen Modi im numerischen Fall beeinflussen wird. Es ist also notwendig, diesen Eigenwert zu berücksichtigen, um sicherzustellen, daß die numerische Approximation korrekt die wahre Lösung darstellt.

3. Stabilitäts-funktionen für RK-ESV

Bitte wenden!

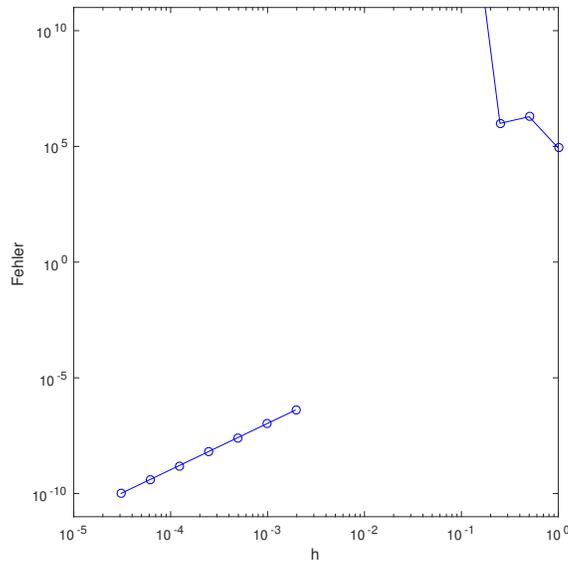


Abbildung 2 – Konvergenz der verbesserten Euler-Methode für ein System von drei linearen homogenen Differentialgleichungen 2 b).

a) Wir wenden ein explizites s -stufiges RK-ESV auf die ODE $\dot{y} = \lambda y$ an. Es gilt

$$k_i = f\left(t_0 + hc_i, y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right) = \lambda \left(y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right) \quad 1 \leq i \leq s.$$

Wir behaupten, dass $k_i = p_i(h\lambda)\lambda y_0$, wobei p_i ein Polynom ist. Für $i = 1$ haben wir $k_1 = \lambda y_0$, weil das Verfahren explizit ist. Nehmen wir an, dass die Behauptung für i gilt. Dann

$$\begin{aligned} k_{i+1} &= f\left(t_0 + hc_i, y_0 + h \sum_{j=1}^i a_{ij} k_j\right) \\ &= \lambda \left(y_0 + h \sum_{j=1}^i a_{ij} k_j\right) \\ &= \lambda \left(y_0 + h \sum_{j=1}^i a_{ij} p_j(h\lambda) \lambda y_0\right) \\ &= \left(1 + h\lambda \sum_{j=1}^i a_{ij} p_j(h\lambda)\right) \lambda y_0 \\ &=: p_{i+1}(h\lambda) \lambda y_0. \end{aligned}$$

Da eine endliche Kombination von Polynomen wieder ein Polynom ist, folgt die

Siehe nächstes Blatt!

Behauptung. Nun ist

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \\&= y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i p_i(h\lambda) \lambda y_0 \\&= (1 + h\lambda \sum_{i=1}^s b_i p_i(h\lambda)) y_0,\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Stabilitätsfunktion ein Polynom in $h\lambda$ ist.

- b) Nein, da die Stabilitätsfunktion ein Polynom in $h\lambda$ ist, ist das Stabilitätsintervall beschränkt und $|g(z)| = |1 + z \sum_{i=1}^s b_i p_i(z)| < 1$ gilt nicht für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) < 0$.

4. L-Stabil

Ein Verfahren ist L-Stabil falls es A-Stabil ist und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} g(z) = 0,$$

mit $z = h\lambda$. Aus der Aufgabe 1 haben wir für die implizite Mittelpunktmethode die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = \frac{2+z}{2-z}$$

und A-Stabilität.

Wir haben

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{2+z}{2-z} = -1,$$

somit ist die implizite Mittelpunktmethode nicht L-Stabil.

5. Steifes nichtlineares AWP

- a) Zunächst müssen wir die Van der Pol-Gleichung umschreiben in ein System erster Ordnung:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

wobei

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \mu(1 - y_0^2(t))y_1 - y_0 \end{pmatrix}.$$

Die Anfangswerte sind dann $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 = [2, 0]^T$.

Bitte wenden!

Lassen wir `StiffVanDerPol.m` laufen, so beobachten wir, dass der explizite Löser `ode45` viel länger braucht als der implizite `ode23s`. In Abb. 4 sehen wir den Grund dafür: `ode45` macht $\sim 10'000$ mal kleinere Schritte als `ode23s` wo die Lösung glatt ist (d.h. wenig variiert)! Also obwohl ein Schritt mit dem impliziten Verfahren `ode23s` massiv teurer ist, gewinnt man viel an Rechenzeit verglichen mit dem expliziten Löser `ode45` der sehr viele kleine Schritte (aus Stabilitätsgründen) machen muss.

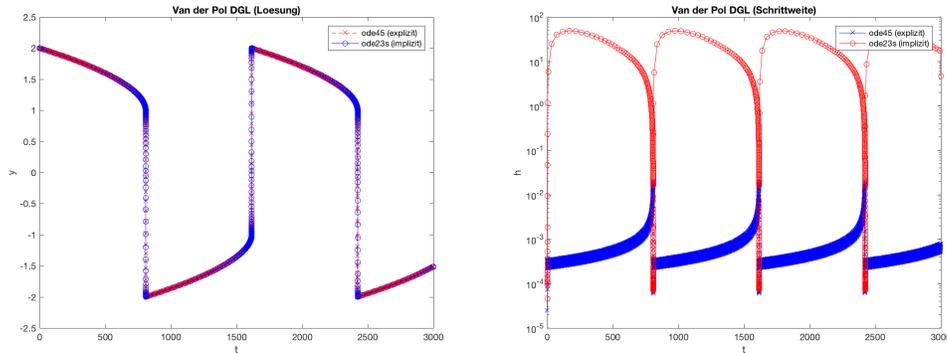


Abbildung 3 – Lösung $y(t)$ links und Schrittweite h rechts.

- b)** Da die Van der Pol Diff.-Gl. nichtlinear ist, müssen wir wie in den Vorlesungsnotizen (Kap. 5 Seite 14) linearisieren. Die Jacobi Matrix von $f(t, \mathbf{y}(t))$ lautet

$$J(t, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu y_0(t)y_1(t) - 1 & \mu(1 - y_0^2) \end{pmatrix}.$$

Setzen wir die Anfangszeit $t_0 = 0$ und die AWe ein, erhalten wir

$$J(t_0, \mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3000 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix berechnet man sehr einfach zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3000 \pm \sqrt{8999996}}{2}.$$

Damit lautet der Steifigkeitsparameter

$$S = \frac{\max_{i=1,\dots,n} |\operatorname{Re} \lambda_i|}{\min_{i=1,\dots,n} |\operatorname{Re} \lambda_i|} \approx 9 \times 10^6 \gg 1$$

Somit erwarten wir ein um den Punkt (t_0, y_0) lokal steifes Problem.

Siehe nächstes Blatt!

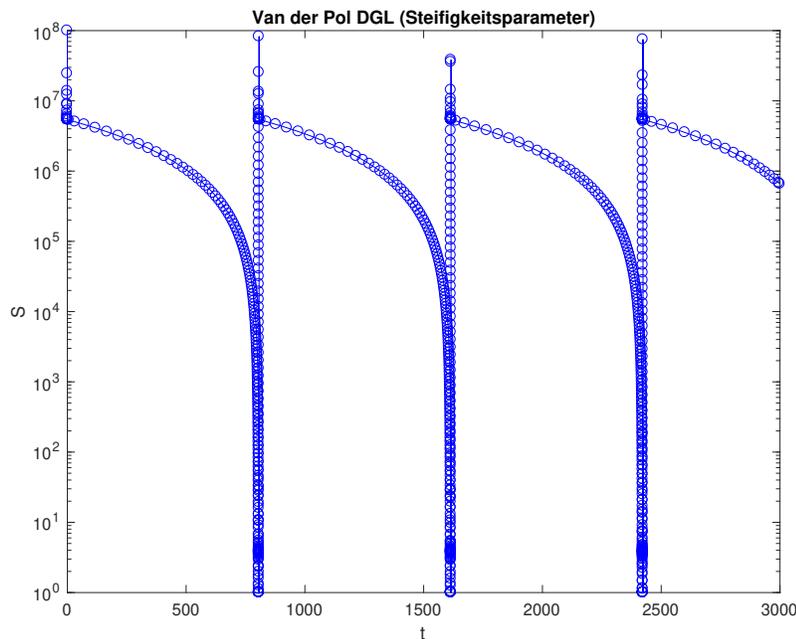


Abbildung 4 – Steifigkeitsparameter als Funktion der Zeit.

c) In Abb. ist der Steifigkeitsparameter S als Funktion der Zeit gezeichnet. Wir beobachten, dass die Lösung hin und her oszilliert zwischen sehr steifen ($S \gg 1$) und nicht steifen Verhalten. Somit ist klar, dass bei nichtlinearen Problemen sowohl steife als auch nicht steife Abschnitte auftreten können. Weiter erklärt die Abb. wieso der explizite Löser so kleine Schrittweiten machen muss.

6. Lineare Mehrschrittverfahren : BDF-Verfahren

Bestimme das Interpolationspolynom durch y_{j+1}, y_j, y_{j-1} :

$$p_2(t) = \frac{y_{j-1}}{2h^2}(t - t_j)(t - t_{j+1}) - \frac{y_j}{h^2}(t - t_{j-1})(t - t_{j+1}) + \frac{y_{j+1}}{2h^2}(t - t_{j-1})(t - t_j)$$

Die Ableitung zur Zeit t_{j+1} ist

$$\frac{d}{dt}p_2(t)|_{t=t_{j+1}} = \frac{y_{j-1}}{2h} - 2\frac{y_j}{h} + \frac{3}{2}\frac{y_{j+1}}{h} \approx \dot{y}(t)$$

Und damit

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{2}y_{j-1} - 2y_j + \frac{3}{2}y_{j+1} \right) = f(t_{j+1}, y_{j+1})$$

Oder

$$y_{j+1} - \frac{4}{3}y_j + \frac{1}{3}y_{j-1} = \frac{2}{3}hf(t_{j+1}, y_{j+1})$$

Dann erhalten wir $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = -\frac{4}{3}, \alpha_2 = \frac{1}{3}$ und $\beta_0 = \frac{2}{3}$.