D-ITET, D-MATL
Dr. R. Käppeli
M. Petrella

Numerische Methoden

FS 2021

Serie 12

1. *Stabilitäts-funktionen und Gebiete*

a) Berechnen Sie die Stabilitäts-funktionen folgender Verfahren:

(i) Expliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

(ii) Impliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

(iii) Heun Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(iv) Klassisches Runge-Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(v) Implizite Mittelpunktsregel

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

Hinweis: (i) und (ii) wurde bereits in der Vorlesung berechnet.

b) Zeichnen Sie die Stabilitätsgebiete mit die MATLAB Funktionen `draw_stabfunc.m` für die Verfahren (i)-(v). Was beobachten Sie?

Bitte wenden!

c) Bestimmen Sie auf mindesten fünf Stellen genau die Stabilitätsintervalle für die Verfahren (i)-(v).
Hinweis: Sie können im Template `stab_klassiches_RK.m` arbeiten und die MATLAB Funktion `fsolve` für (iv) verwenden.

d) Wir betrachten das AWP

$$\dot{y}(t) = (-1000 + \pi i)y(t)$$
$$y(0) = 1.$$

Geben Sie sinnvolle Grenzen für die Schrittweite h an, so dass die Verfahren (i)-(v) den qualitativen Verlauf der exakten Lösung folgen.
Hinweis: Sie können im Template `grenzen_schrittweite_h.m` arbeiten und die MATLAB Funktion `fsolve` für (iv) verwenden.

e) Zeichnen Sie den Realteil und den Imaginärteil der Lösung $y(t)$ aus **d)**.
Hinweis: Sie können im Template `schnelle_oszillation_verfall.m` arbeiten.

2. *Lineares homogenes System*

Gegeben folgendes System von drei linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t),$$

mit

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{869}{10} & \frac{1521}{5} \\ 0 & -\frac{227}{2} & \frac{591}{2} \\ 0 & \frac{591}{2} & -\frac{1803}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP) mit den Anfangswerten $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = 6$ und $y_3(t) = 2$ auf dem Zeitintervall $t \in [0, 2]$.

a) Lösen Sie obiges AWP analytisch.
Hinweis: Entkoppeln Sie dieses System durch diagonalisieren der Matrix A (wozu Sie ein Computeralgebrasystem verwenden können).

b) Lösen Sie obiges AWP numerisch mit dem verbesserten Euler Verfahren für $h = 2^{-i}$, $i = 0, 1, 2, ..., 12$, und berechnen den globalen Diskretisierungsfehler (GDF) zur Zeit $t = 2$. Erklären Sie den Verlauf des GDFs als Funktion der Schrittweite h.
Hinweis: Sie finden das bereits implementierte verbesserte Euler Verfahren in `verbEuler.m`.

Siehe nächstes Blatt!

3. *Stabilitäts-funktionen für RK-ESV*

a) Zeigen Sie, dass die Stabilitätsfunktion eines expliziten RK-ESVs *immer* ein Polynom ist .

b) Kann ein explizites RK-ESV A-stabil sein?

4. *L-Stabil* Ist die implizite Mittelpunkts-Methode L-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Beispiel (3) aus Kapitel 5 der Vorlesung.

5. *Steifes nichtlineares AWP*

Wir betrachten (wiedereinmal!) die Van der Pol Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) = \mu(1 - y(t)^2)\dot{y}(t) - y(t)$$

mit $\mu = 1000$ für $t \in [0, 3000]$ mit den Anfangswerten

$$y(0) = 2 \quad , \quad \dot{y}(0) = 0.$$

a) Lösen Sie obiges Anfangswertproblem numerisch mit den Matlab Lösern `ode45` und `ode23s`. Was fällt Ihnen auf?
Hinweis: Arbeiten Sie im Template `StiffVanDerPol.m`.
Beachte: Die Rechnung mit `ode45` kann durchaus ein paar Minuten dauern.

b) Berechnen Sie den Steifigkeitsparameter S zur Anfangszeit und Anfangswerten. Ist dieses Problem lokal steif?

c) Berechnen Sie den Steifigkeitsparameter S in jedem Zeitschritt für die numerische Lösung mit `ode23s`. Was beobachten Sie?

6. *Lineare Mehrschrittverfahren : BDF-Verfahren*

In dieser Aufgabe befassen wir uns weiter mit sog. Mehrschrittverfahren, welche wir bereits in Aufgabe 1 der Serie 10 kennengelernt haben. Lineare Mehrschrittverfahren haben die Form

$$\sum_{l=0}^{k} \alpha_l \, y_{j+1-l} = h \sum_{l=0}^{k} \beta_l \, f_{j+1-l}.$$

Hier bezeichnet $y_{j+1-l} \approx y\,(t_{j+1-l})$ die Approximation der Lösung eines geg. Anfangswertswertsproblem (AWP) zur Zeit t_{j+1-l}, $f_{j+1-l} \approx f\,(t_{j+1-l}, y_{j+1-l})$ die Auswertung der rechten Seite Funktion f und α_l, β_l Koeffizienten. Der Einfachheit halber

Bitte wenden!

nehmen wir auch hier wieder eine konstante Schrittweite h an, d.h. $t_j = t_0 + j\ h$ $(j = 0, 1, ...)$.

Spezialfälle der Koeffizientenwahl beschreiben folgende Verfahren:

- Adams-Bashforth (AB):
  - $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$, und $\alpha_l = 0$ für $l > 1$,
  - $\beta_0 = 0$.

  Da $\beta_0 = 0$ sind die Verfahren explizit. AB2 ($k = 2$) hatten wir in Aufgabe 1 der Serie 10 konstruiert.
- Adams-Moulton (AM):
  - $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$, und $\alpha_l = 0$ für $l > 1$,
  - $\beta_0 \neq 0$.

  Da $\beta_0 \neq 0$ sind diese Verfahren implizit.
- Rückwärtsdifferenzenmethoden (Backward Differencing Methods (BDF)):
  - $\beta_0 \neq 0$ und $\beta_l = 0$ für $l \geq 1$

  Da $\beta_0 \neq 0$ sind diese Verfahren implizit.

BDF Methoden werden oft auf steife AWP angewendet. Die Idee eines k-Schritt BDF Verfahren (kurz BDFk) ist die rechte Seite Funktion f nur am neuen Zeitschritt (t_{j+1}, y_{j+1}) auszuwerten. Dies wird gleichgesetzt mit einer Approximation der Ableitung zur Zeit t_{j+1}, welche man mit Interpolation von $y_{j+1}, y_j, \ldots, y_{j+1-k}$ bestimmt (ganz analog zu finiten Differenzen, welche wir in Aufgabe 4 der Serie 2 gesehen haben). Es soll nun BDF2 gebaut werden:

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p_2(t)$ durch $(t_{j+1}, y_{j+1}), (t_j, y_j)$ und (t_{j-1}, y_{j-1}).

b) Bestimmen Sie mittels a) eine Approximation der Ableitung der Lösung $\dot{y}$ zur Zeit t_{j+1} (d.h. berechnen Sie $\dot{p}_2(t_{j+1})$).

c) Setzen Sie die Approximation der Ableitung $\dot{y}(t_{j+1})$ gleich der rechten Seite Funtion ausgewertet bei (t_{j+1}, y_{j+1}) und bestimmen Sie die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ und β_0 von BDF2. Normieren Sie $\alpha_0 = 1$.

Hinweis : Beispiel (10) in Kap. 5 der Vorlesungsnotizen.

Abgabe: Bis Freitag, den 04.06.2021.