In diesem Aufgabenblatt darf man nur die Axiome aus den §1–6 verwenden, also das Extensionalitätsaxiom, das Aussonderungsaxiom, das Existenzaxiom, das Paarmengenaxiom und das Vereinigungsaxiom.

Übung A.1. Sei $\varphi = \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$ eine Formel. Man beweise

$$\forall b \cdot \forall a_1 \cdot \dots \cdot \forall a_n \cdot \exists c \cdot \big[\forall x \cdot (x \in c) \leftrightarrow (x \in b) \wedge \varphi(x, a_1, \dots, a_n)\big].$$

Übung A.2. Man beweise, dass $C := \{x \mid x \notin x\}$ eine echte Klasse ist.

Übung A.3. Die Klasse der **Einermengen** Ω^1 ist definitionsgemäß die Klasse

$$\Omega^1 := \{x \mid (\exists y \in x) \cdot (\forall z \in x) \cdot (y = z)\}$$

Man beweise, dass Ω^1 eine echte Klasse ist.

Übung A.4. Sei a eine Menge. Man beweise, dass es eine solche Menge x gibt, dass $x \notin a$ gilt.

Übung A.5. Sei C eine Klasse und a eine Menge. Man beweise, dass die Klasse $C \cap a$ eine Menge ist.

Übung A.6. Die **symmetrische Differenz** $a \triangle b$ zweier Mengen a und b ist definitionsgemäß die Klasse

$$a \triangle b := \big\{z \mid \big((z \in a) \vee (z \in b)\big) \wedge z \notin (a \cap b)\big\}\,.$$

Man beweise, dass $a \triangle b$ eine Menge ist.

Übung A.7. Sei a eine nichtleere Menge. Man beweise

$$\exists b \cdot \forall x \cdot \Big[(x \in b) \leftrightarrow \forall y \cdot \big((y \in a) \wedge (x \in y)\big)\Big].$$

Warum ist die Annahme, dass a nichtleer ist, notwendig?

Übung A.8. Man zeige, die Mengen $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$,... sind paarweise verschieden.

Übung A.9. Man ersetze das Paarmengenaxiom durch die Forderung

$$\{a\} \text{ ist eine Menge für jede Menge } a.$$

Zeige, dass diese Forderung zusammen mit dem Extensionalitätsaxiom, dem Aussonderungsaxiom, und dem Existenzaxiom, in einem Universum erfüllt werden kann, das nur aus Einermengen besteht, nämlich $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$...