In diesem Aufgabenblatt darf man nur die Axiome aus den §1–10 verwenden, also das Extensionalitätsaxiom, das Aussonderungsaxiom, das Existenzaxiom, das Paarmengenaxiom, das Vereinigungsaxiom, das Potenzmengenaxiom, und das Ersetzungsaxion.

Übung B.1. Sei a eine Menge. Man beweise, $\mathfrak{P}a \not\subseteq a$ gilt.

Übung B.2. Sei r eine Relation auf eine Menge a. Man beweise, dass sowohl $\mathsf{D}(r)$ als auch $\mathsf{W}(r)$ Mengen sind.

Übung B.3. Es seien a eine nichtleere Menge, und r, s Relationen in a. Man beweise, dass $(s \circ r)^{-1} = r^{-1} \circ s^{-1}$.

Übung B.4. Sei $(a, <)$ eine partiell geordnete Menge. Man definiert $\leq$ durch

$$x \leq y \quad \overset{\text{Def}}{=} \quad (x < y) \vee (x = y),$$

und dann definiert man $\prec$ durch

$$x \prec y \quad \overset{\text{Def}}{=} \quad (x \leq y) \wedge (x \neq y).$$

Man beweise, dass $\prec$ mit $<$ übereinstimmt.

Übung B.5. Seien a, b Mengen. Man beweise, dass eine Relation r aus a in b eine Funktion ist, genau dann, wenn $r \circ r^{-1} \subseteq \mathrm{id}_b$.

Übung B.6. Seien a, b Mengen. Man beweise, dass die Gesamtheit b^a aller Funktionen $f\colon a \to b$ eine Menge ist.

Übung B.7. Sei a eine Menge und $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Man beweise, dass die Menge aller Funktionen von n nach a mit dem n-fachen Kreuzprodukt $a \times \cdots \times a$ identifiziert werden kann. Dies impliziert, dass die beiden Definitionen von a^n konsistent sind.

Übung B.8. Sei a eine Menge. Ist $b \subseteq a$, erklärt man die **charakteristische Funktion** $\chi_{b,a} \in 2^a$ durch $\chi_{b,a}(x) = 1$ für $x \in b$ und $\chi_{a,b}(x) = 0$ sonst. Sei $f\colon \mathfrak{P}a \to 2^a$ erklärt durch

$$f(b) := \chi_{a,b}.$$

Man beweise, dass $f\colon \mathfrak{P}a \simeq 2^a$.

Übung B.9. Sei f eine Funktion mit $\mathsf{D}(f) = a$. Man beweise, dass f eine Äquivalenzrelation $\sim_f$ auf a mit

$$x \sim_f y \leftrightarrow f(x) = f(y)$$

erzeugt.

Übung B.10. Sei $f\colon a \twoheadrightarrow b$ eine Funktion, und $\sim_f$ die Äquivalenzrelation von Übung B.9, und c die von $\sim_f$ induzierte Partition von a. Man beweise, dass es eine Bijektion $g\colon b \cong c$ gibt, so dass $f = g \circ h$ ist, wobei $h\colon a \to a_f$ die Funktion $h(x) = [x]$ ist.

Übung B.11. Sei a eine Menge, und sei A die Klasse aller Äquivalenzrelationen auf a und sei P die Klasse aller Partitionen von a. Sei R die Relation auf $A \times P$ gegeben durch

$$R := \{\langle \sim, a/_\sim \rangle \mid \sim \in A\}$$

Man beweise, dass A und P Mengen sind, und dass R eine bijektive Funktion von A nach P ist.

Übung B.12. Sei eine Klasse F eine Funktion und angenommen, dass $\mathsf{D}(F)$ eine Menge ist. Man beweise, dass $\mathsf{W}(F)$ eine Menge ist. Man beweise außerdem, dass diese Aussage äquivalent zum Ersetzungsaxiom ist.

Übung B.13. Man beweise, dass das Kreuzprodukt $a \times b$ von zwei Mengen eine Menge ist, ohne das Potenzmengenaxiom zu verwenden.