Übung D.1. Sei a eine Menge. Man beweise, dass die folgenden drei Bedingungen äquivalent sind:

1. a ist transitiv;
2. $\bigcup a \subseteq a$;
3. $a \subseteq \mathfrak{P}a$.

Übung D.2. Man beweise, dass jede Ordinalzahl erblich transitiv ist[1].

Übung D.3. Man beweise, dass Ord eine echte Klasse ist.

Übung D.4. Sei a eine induktive Menge. Man beweise, dass $a \cap \mathsf{Ord}$ auch induktiv ist.

Übung D.5. Sei C eine Klasse mit $C \cap \mathsf{Ord} \neq \emptyset$. Man beweise, dass es ein $\alpha \in C \cap \mathsf{Ord}$ gibt, so dass

$$\forall(\beta \in \mathsf{Ord}) \cdot \big((\beta < \alpha) \to (\beta \notin C)\big)$$

gilt.

Übung D.6. Man beweise die Äquivalenz folgender Bedingungen für $\alpha \in \mathsf{Ord}$:

1. α ist Limeszahl,
2. $\forall(\beta < \alpha) \cdot (\beta + 1) < \alpha$,
3. $\bigcup \alpha = \alpha$.

Übung D.7. Man beweise, dass ω eine Limeszahl ist. Man beweise außerdem, dass ω die kleinste nichtleere Limeszahl ist, und dass die natürlichen Zahlen genau die Ordnungszahlen kleiner als ω sind.

[1] Tatsächlich kann man mithilfe des Fundierungsaxioms beweisen, dass die Ordinalzahlen genau die erblich transitiven Mengen sind, vgl. Übung G.1.