Übung E.1. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{Ord}$ mit $\alpha < \beta$. Man beweise:

1. $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.
2. $\alpha \bullet \gamma \leq \beta \bullet \gamma$.
3. $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

Übung E.2. Man finde für jeden der folgenden Fälle Ordinalzahlen (nicht notwendigerweise jedes Mal die gleiche Ordinalzahlen), so dass sich ergibt:

1. $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$.
2. $\alpha \bullet \beta \neq \beta \bullet \alpha$.
3. $(\alpha + \beta) \bullet \gamma \neq \alpha \bullet \gamma + \beta \bullet \gamma$.
4. $(\alpha \bullet \beta)^\gamma \neq \alpha^\gamma \bullet \beta^\gamma$.
5. $\alpha < \beta$ und $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.
6. $\alpha < \beta$, $\gamma > 0$, und $\alpha \bullet \gamma = \beta \bullet \gamma$,
7. $\alpha < \beta$ und $\gamma > 0$, und $\alpha^\gamma = \beta^\gamma$.

Man beweise, dass jedoch alle sieben Aussagen falsch sind, wenn α, β und γ alles $< \omega$ sein müssen.

Übung E.3. Man beweise die folgenden **Distributivgesetze**:

1. $\alpha \bullet (\beta + \gamma) = \alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma$.
2. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \bullet \alpha^\gamma$.
3. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \bullet \gamma}$.

Übung E.4. Seien $(a, <_a)$ und $(b, <_b)$ zwei total geordnete Mengen. Wir definieren eine Relation $\prec$ auf $c := a \times b$ durch:

$$(x, y) \prec (z, w) \qquad \text{g.d.w.} \qquad \begin{array}{l} x <_a z, \\ \text{oder } x = z \text{ und } y <_b w. \end{array}$$

1. Man beweise, dass $\prec$ eine totale Ordnung ist.
2. Nun angenommen, dass sowohl $(a, <_a)$ als auch $(b, <_b)$ wohlgeordnet sind. Man beweise, dass $(c, \prec)$ auch wohlgeordnet ist.
3. Angenommen weiter, dass $(a, <_a)$ bzw. $(b, <_b)$ die Ordnungstypen α bzw. β haben. Man beweise, dass $(c, \prec)$ die Ordnungstyp $\alpha \bullet \beta$ hat.

Übung E.5. Seien $(a, <_a)$ und $(b, <_b)$ zwei total geordnete Mengen mit $a \cap b = \emptyset$. Wir definieren eine Relation $\prec$ auf $c := a \cup b$ durch:

$$x \prec y \qquad \text{g.d.w.} \qquad \begin{array}{l} x, y \in a \text{ und } x <_a y, \\ \text{oder } x, y \in b \text{ und } x <_b y, \\ \text{oder } x \in a \text{ und } y \in b. \end{array}$$

1. Man beweise, dass $\prec$ eine totale Ordnung ist.
2. Nun angenommen, dass sowohl $(a, <_a)$ als auch $(b, <_b)$ wohlgeordnet sind. Man beweise, dass $(c, \prec)$ auch wohlgeordnet ist.
3. Angenommen weiter, dass $(a, <_a)$ bzw. $(b, <_b)$ die Ordnungstypen α bzw. β haben. Man beweise, dass $(c, \prec)$ die Ordnungstyp $\alpha + \beta$ hat.

Übung E.6. Seien $\alpha \leq \beta$ zwei Ordinalzahlen. Man beweise, dass eine eindeutige Ordinalzahl γ existiert, so dass $\alpha + \gamma = \beta$. Man verwendet dies, um die **Subtraktion** von Ordinalzahlen zu definieren. *Hinweis:* Benutze Übung E.5.

Übung E.7. Sei α eine Ordinalzahl. Man beweise, dass eine eindeutige Limeszahl λ und eine eindeutige natürliche Zahl n existiert, so dass $\alpha = \lambda + n$ gilt.

Übung E.8. Sei α eine Ordinalzahl. Man beweise, dass α genau dann eine Limeszahl ist, wenn es eine solche Ordinalzahl β existiert, dass $\alpha = \omega \bullet \beta$ gilt.

Übung E.9. Sei $(a, <)$ eine wohlgeordnete Menge und $H \colon \Omega \to \Omega$ eine Funktion. Man beweise, dass es genau eine Funktion f mit $\mathsf{D}(f) = a$ existiert, so dass für alle $x \in a$:

$$f(x) = H[f_{\restriction a_x}],$$

wobei wie üblich a_x das Anfangsstück $\{y \in a \mid y < x\}$ bezeichnet. *Hinweis*: Ändere den Beweis des Rekursionssatzes.