In diesem Übungsblatt darf das Fundierungsaxiom in allen Übungen außer Übung F.2 verwendet werden.

Übung F.1. Man beweise, dass jede erblich transitive Menge eine Ordnungszahl ist.

Übung F.2. Man beweise, dass die Schlussfolgerung des Hierarchiesatzes äquivalent zum Fundierungsaxiom ist.

Übung F.3. Seien a, b Mengen und sei $\alpha \in \mathsf{Ord}$, so dass $\mathsf{R}(a) < \alpha$ und $\mathsf{R}(b) < \alpha$ gilt. Man beweise, dass aller Mengen

$$\{a, b\}, \quad \langle a, b\rangle, \quad a \cup b, \quad \bigcup a, \quad \mathfrak{P}a, \quad b^a$$

einen Rang $< \alpha + \omega$ haben.

Übung F.4. Man beweise, dass v_ω genau aus den erblich endlichen Mengen besteht.

Eine Klasse C heiß **transitiv**, wenn $\forall(x \in C) \cdot x \subseteq C$. Die Klasse Ord ist transitiv. Die nächsten beiden Übungen verallgemeinern Satz 17.3 und der Rekursionssatz auf beliebige transitive Klassen.

Übung F.5. Sei T eine transitive Klasse und C eine Klasse, so dass $\emptyset \in C$ und

$$\forall(a \in T) \cdot \left[\forall(x \in a) \cdot (x \in C) \to (a \in C)\right]$$

gilt. Man beweise, dass $T \subseteq C$.

Übung F.6. Sei T eine transitive Klasse und sei $H \colon \Omega \to \Omega$ eine Funktion. Man beweise, dass es eine eindeutige Funktion $G \colon T \to \Omega$ existiert, so dass für alle $x \in T$

$$G(x) = H[G_{\restriction x}]$$

gilt.

Übung F.7. Sei C eine Klasse. Man beweise, dass es eine eindeutige Klasse D gibt, so dass

$$D = \{x \in C \mid x \subset D\}$$

gilt. Man beweise außerdem, dass D die größte in C enthaltene transitive Klasse ist.

Übung F.8. Seien S, T transitive Klassen und $F\colon S \to T$ eine bijektive Funktion, so dass

$$\forall(x \in S) \cdot \forall(a \in S) \cdot \big[(x \in a) \leftrightarrow (F(x) \in F(a))\big].$$

Man beweise, dass $S = T$ und dass $F(x) = x$ für alle $x \in S$ gilt.