Das Auswahlaxiom wird bei Übungen benötigt, die mit einem Stern ($\star$) gekennzeichnet sind.

Übung G.1. ($\star$) Man beweise, dass die folgende Aussage äquivalent zum Auswahlaxiom ist.

- Ist a eine Menge, deren Elemente nichtleer und paarweise disjunkt sind, so existiert eine Menge w, die mit jedem Element von a genau ein Element gemeinsam hat.

Übung G.2. Man zeige *ohne* Verwendung von dem Auswahlaxiom: Sei a eine endliche Menge. Es existiert eine Auswahlfunktion auf a.

Übung G.3. Sei $(b, <)$ eine total geordnete Menge. Sei

$$a \subseteq \{x \in \mathfrak{P}b \mid x \text{ ist endlich}\} .$$

Man beweise, dass eine Auswahlfunktion auf a existiert.

Übung G.4. Sei $(a, <)$ eine wohlgeordnete Menge. Man beweise, dass $\mathfrak{P}a$ eine totale Ordnung besitzt.

Definition: Eine Menge a heißt **Dedekind-endlich**, wenn sie zu keiner echten Teilmenge gleichmächtig ist, anderenfalls **Dedekind-unendlich**.

Übung G.5. Man beweise, dass jede endlich Menge auch Dedekind-endliche Menge ist.

Übung G.6. Man beweise mit Hilfe des Auswahlaxioms, dass jede Dedekind-endliche Menge auch endlich ist.

Übung G.7. ($\star$) Man finde eine explizite Wohlordnung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.