In diesem Aufgabenblatt darf man nur die Axiome aus den §1–10 verwenden, also das Extensionalitätsaxiom, das Aussonderungsaxiom, das Existenzaxiom, das Paarmengenaxiom, das Vereinigungsaxiom, das Potenzmengenaxiom, und das Ersetzungsaxiom.

Übung B.1. Sei a eine Menge. Man beweise, dass $\mathfrak{P}a \not\subseteq a$ gilt.

Lösung: Wir definieren die Menge $b := \{x \in a \mid x \notin x\}$. Als Teilmenge von a gilt $b \in \mathfrak{P}a$. Angenommen, dass auch $b \in a$ gilt. Falls $b \in b$ gilt, dann gilt wegen der Definition von b auch $b \notin b$, Widerspruch! Umgekehrt falls $b \notin b$ gilt, dann folgt $b \in b$, wiederum ein Widerspruch. Also war die Annahme dass $b \in a$ ist falsch. Also ist $\mathfrak{P}a \not\subseteq a$.

Übung B.2. Sei r eine Relation auf einer Menge a. Man beweise, dass sowohl $\mathsf{D}(r)$ als auch $\mathsf{W}(r)$ Mengen sind.

Lösung: Es gilt

$$\mathsf{D}(r) = \{x \in a \mid \exists y \cdot xry\}$$

und

$$\mathsf{W}(r) = \{y \in a \mid \exists x \cdot xry\}$$

also folgt aus dem Aussonderungsaxiom, dass dies Mengen sind.

Übung B.3. Es seien a eine nichtleere Menge, und r, s Relationen in a. Man beweise, dass $(s \circ r)^{-1} = r^{-1} \circ s^{-1}$.

Lösung: Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \langle x, z\rangle \in (s \circ r)^{-1} &\iff \langle z, x\rangle \in s \circ r \\ &\iff \exists y \cdot zry \wedge ysx \\ &\iff \exists y \cdot yr^{-1}z \wedge xs^{-1}y \\ &\iff \langle x, z\rangle \in r^{-1} \circ s^{-1}. \end{aligned}$$

Also folgt $(s \circ r)^{-1} = r^{-1} \circ s^{-1}$.

Übung B.4. Sei $(a, <)$ eine partiell geordnete Menge. Man definiert $\leq$ durch

$$x \leq y \quad \overset{\text{Def}}{=} \quad (x < y) \vee (x = y),$$

und dann definiert man $\prec$ durch

$$x \prec y \quad \overset{\text{Def}}{=} \quad (x \leq y) \wedge (x \neq y).$$

Man beweise, dass $\prec$ mit $<$ übereinstimmt.

Lösung: Für alle $x, y \in a$ gilt

$$\begin{aligned} x \prec y &\iff (x \leq y) \wedge (x \neq y) \\ &\iff ((x < y) \vee (x = y)) \wedge (x \neq y) \\ &\iff ((x < y) \wedge (x \neq y)) \vee ((x = y) \wedge (x \neq y)) \\ &\iff (x < y) \wedge (x \neq y) \end{aligned}$$

Weil $<$ eine partielle Ordnung ist, gilt $x < y \to x \neq y$. Also ist der obere Ausdruck äquivalent zu $x < y$.

Übung B.5. Seien a, b Mengen. Man beweise, dass eine Relation r aus a in b eine Funktion ist, genau dann, wenn $r \circ r^{-1} \subseteq \mathrm{id}_b$.

Lösung: Sei r eine Funktion. Dann folgt für alle $x, z \in b$ und $y \in a$

$$xr^{-1}y \wedge yrz \iff yrx \wedge yrz \Rightarrow x = z.$$

Also gilt

$$r \circ r^{-1} = \{\langle x, z\rangle \in b \times b \mid \exists y \cdot xr^{-1}y \wedge yrz\} \subseteq \mathrm{id}_b\,.$$

Umgekehrt angenommen, dass $r \circ r^{-1} \subseteq \mathrm{id}_b$ gilt. Dann folgt für alle $x, z \in b$ und $y \in a$

$$yrx \wedge yrz \iff xr^{-1}y \wedge yrz \Rightarrow \langle x, z\rangle \in r \circ r^{-1} \Rightarrow x = z,$$

also ist r eine Funktion.

Übung B.6. Seien a, b Mengen. Man beweise, dass die Gesamtheit b^a aller Funktionen $f\colon a \to b$ eine Menge ist.

Lösung: Jede Funktion ist eine Relation, also eine Teilmenge von $a \times b$. Die Klasse aller Funktionen kann daher geschrieben werden als

$$b^a = \{f \subseteq a \times b \mid \forall x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot xfy \wedge xfz \to y = z\},$$

sie ist nach dem Aussonderungsaxiom also eine Menge.

Übung B.7. Sei a eine Menge und $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Man beweise, dass die Menge aller Funktionen von n nach a mit dem n-fachen Kreuzprodukt $a \times \cdots \times a$ identifiziert werden kann. Dies impliziert, dass die beiden Definitionen von a^n konsistent sind.

Lösung: Wir definieren die Funktion r, die jeder Funktion $f \in a^n$ das Element $\langle f(0), \ldots, f(n-1)\rangle \in a \times \cdots \times a$ zuordnet. Angenommen, für $f, g \in a^n$ gilt $r(f) = r(g)$. Dann folgt $f(0) = g(0), \ldots, f(n-1) = g(n-1)$ wegen Satz 6.1 aus der Vorlesung. Weil f und g Funktionen von n nach a sind, folgt daraus $f = g$. Also ist r injektiv. Umgekehrt sei $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$ ein Element von $a \times \cdots \times a$. Dann ist $f := \{\langle 0, a_0\rangle, \ldots, \langle n-1, a_{n-1}\rangle\} \subset n \times a$ eine Funktion mit $r(f) = \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$. Also ist r surjektiv und damit bijektiv.

Übung B.8. Sei a eine Menge. Ist $b \subseteq a$, erklärt man die **charakteristische Funktion** $\chi_{b,a} \in 2^a$ durch $\chi_{b,a}(x) = 1$ für $x \in b$ und $\chi_{a,b}(x) = 0$ sonst. Sei $f\colon \mathfrak{P}a \to 2^a$ erklärt durch

$$f(b) := \chi_{a,b}.$$

Man beweise, dass $f\colon \mathfrak{P}a \simeq 2^a$.

Lösung: Wir zeigen zuerst die Injektivität. Seien dazu $b, c \in \mathfrak{P}a$. Falls $f(b) = f(c)$ ist, folgt

$$\forall x \in a \cdot \chi_{a,b}(x) = \chi_{a,c}(x),$$

also

$$\forall x \in a \cdot (x \in b \leftrightarrow x \in c)$$

und mit dem Extensionalitätsaxiom folgt $b = c$. Also ist f injektiv. Umgekehrt sei $\phi \in 2^a$ eine Funktion. Wir definieren die Menge $b := \{x \in a \mid \phi(x) = 1\}$. Dann gilt $\phi = \chi_{a,b}$, also ist f surjektiv und somit bijektiv.

Übung B.9. Sei f eine Funktion mit $\mathsf{D}(f) = a$. Man beweise, dass f eine Äquivalenzrelation $\sim_f$ auf a mit

$$x \sim_f y \leftrightarrow f(x) = f(y)$$

erzeugt.

Lösung: Für alle $x \in a$ gilt $f(x) = f(x)$, also ist $x \sim_f x$ und $\sim_f$ ist reflexiv. Für alle $x, y \in a$ gilt $f(x) = f(y)$ genau dann, wenn $f(y) = f(x)$ gilt, also folgt $x \sim_f y \leftrightarrow y \sim_f x$ und daher ist $\sim_f$ symmetrisch. Seien nun $x, y, z \in a$ mit $x \sim_f y$ und $y \sim_f z$. Dann ist wegen $f(x) = f(y) = f(z)$ auch $f(x) = f(z)$, also $x \sim_f z$. Damit ist $\sim_f$ auch transitiv. Als reflexive, symmetrische und transitive Relation ist $\sim_f$ eine Äquivalenzrelation.

Übung B.10. Sei $f\colon a \twoheadrightarrow b$ eine Funktion, und $\sim_f$ die Äquivalenzrelation von Übung B.9, und a_f die von $\sim_f$ induzierte Partition von a. Man beweise, dass es eine Bijektion $g\colon a_f \cong b$ gibt, so dass $f = g \circ h$ ist, wobei $h\colon a \to a_f$ die Funktion $h(x) = [x]$ ist.

Lösung: Wir definieren die Relation

$$g := \{\langle h(x), f(x)\rangle \in a_f \times b \mid x \in a\}.$$

Für $x, y \in a$ mit $h(x) = h(y)$ gilt $y \in [x]$, also nach Definition der Äquivalenzrelation $f(x) = f(y)$. Daraus folgt, dass g eine Funktion ist. Zudem gilt $f = g \circ h$. Wir müssen noch zeigen, dass g eine Bijektion ist. Seien $x, y \in a$ mit $f(x) = f(y)$. Dann folgt $x \sim_f y$, also gilt $h(x) = h(y)$. Daraus folgt, dass g injektiv ist. Für die Surjektivität sei $z \in b$ gegeben. Weil f surjektiv ist, existiert ein $x \in a$ mit $f(x) = z$. Dann gilt $g(h(x)) = z$, also ist g auch surjektiv. Daher ist g bijektiv.

ÜBUNG B.11. Sei a eine Menge, und sei A die Klasse aller Äquivalenzrelationen auf a und sei P die Klasse aller Partitionen von a. Sei R die Relation auf $A \times P$ gegeben durch

$$R := \{\langle \sim, a/_\sim \rangle \mid \sim \in A\}$$

Man beweise, dass A und P Mengen sind, und dass R eine bijektive Funktion von A nach P ist.

Lösung: Wir können schreiben

$$A = \{r \in \mathfrak{P}a \mid (\forall x \in a \cdot xrx) \wedge (\forall x, y \in a \cdot (xry \to yrx)) \wedge (\forall x, y, z \in a \cdot ((xry \wedge yrz) \to yrz))\},$$

also ist A eine Menge gemäss Aussonderungsaxiom. Die Klasse P lässt sich schreiben als

$$P = \{b \in \mathfrak{P}\mathfrak{P}a \mid (\forall x \in a \cdot \exists c \in b \cdot x \in c) \wedge (\forall c, d \in b \cdot \forall x \in a \cdot ((x \in c \wedge x \in d) \to b = c))\},$$

also ist auch P eine Menge gemäss Aussonderungsaxiom. Wir zeigen nun zuerst, dass R eine Funktion ist. Angenommen $\langle \sim, y \rangle \in R$ und $\langle \sim, z \rangle \in R$. Dann ist $y = a/_\sim = z$, also ist R eine Funktion. Seien nun $\sim, \sim' \in A$ mit $a/_\sim = a/_{\sim'}$. Dann gilt für alle $x \in a$ auch $[x]_\sim = [x]_{\sim'}$, also folgt

$$x \sim y \iff y \in [x]_\sim \iff y \in [x]_{\sim'} \iff x \sim' y.$$

Daher ist $\sim = \sim'$. Umgekehrt sei $b \in P$. Wir definieren

$$x \sim y :\iff \exists c \in b \cdot x \in c \wedge x \in y.$$

Wir zeigen nun, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Sei $x \in a$. Weil b eine Partition ist, existiert ein $c \in b$ mit $x \in c$. Daher ist $x \sim x$. Für $x, y \in a$ gilt

$$x \sim y \iff \exists c \in b \cdot x \in c \wedge y \in c \iff \exists c \in b \cdot y \in c \wedge x \in c \iff y \sim x,$$

also ist $\sim$ symmetrisch. Für $x, y, z \in a$ gilt nun

$$x \sim y \wedge y \sim z \iff (\exists c \in b \cdot x \in c \wedge y \in c) \wedge (\exists d \in b \cdot y \in d \wedge z \in d)$$

und weil b eine Partition ist, folgt daraus $\exists c \in b \cdot x \in c \wedge z \in c$ und damit $x \sim z$. Somit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Es gilt nun $a/_\sim = b$, also ist R surjektiv. Wir folgern daraus, dass R bijektiv ist.

ÜBUNG B.12. Sei eine Klasse F eine Funktion und angenommen, dass $\mathsf{D}(F)$ eine Menge ist. Man beweise, dass $\mathsf{W}(F)$ eine Menge ist. Man beweise außerdem, dass diese Aussage äquivalent zum Ersetzungsaxiom ist.

Lösung: Es gilt $W(F) = W(F|_{D(F)}) = F[D(F)]$, was nach dem Ersetzungsaxiom eine Menge ist, weil $D(F)$ eine Menge ist. Also folgt aus dem Ersetzungsaxiom die Aussage der Aufgabenstellung. Umgekehrt angenommen, dass die Aussage aus der Aufgabenstellung richtig ist für alle Klassen F, die eine Funktion sind. Sei a eine Menge. Wir müssen zeigen, dass $F[a]$ eine Menge ist. Wir definieren die Klasse $F|_a$. Diese ist wiederum eine Funktion und $D(F|_a) = a$ ist eine Menge. Nach Voraussetzung ist also $W(F|_a) = F[a]$ eine Menge. Also folgt aus der Aussage in der Aufgabenstellung das Ersetzungsaxiom.

Übung B.13. Man beweise, dass das Kreuzprodukt $a \times b$ von zwei Mengen eine Menge ist, ohne das Potenzmengenaxiom zu verwenden.

Lösung: Aus dem Vereinigungsaxiom wissen wir, dass $a \cup b$ eine Menge ist. Wegen Aufgabe 7 ist $(a \cup b) \times (a \cup b) \cong (a \cup b)^2$ eine Menge. Nun schreiben wir

$$a \times b = \{\langle x, y \rangle \in (a \cup b) \times (a \cup b) \mid x \in a \wedge y \in b\},$$

also folgt aus dem Aussonderungsaxiom, dass $a \times b$ eine Menge ist.