In den Übungen C.1-C.6 sollte das Wort „endlich" immer im Sinne der zweiten Definition verstanden werden. Satz 13.2 darf nicht verwendet werden.

Übung C.1. Sei a eine Menge und $n \in \mathbb{N}_0$, und sei $f: a \to n$ eine Bijektion. Man beweise, dass a endlich ist.

Lösung: Wir definieren die Funktion $f': \mathfrak{P}a \to \mathfrak{P}n$ wie folgt: Für ein Element $b \in \mathfrak{P}a$ sei $f'(b)$ die Menge $\{f(x) \in n \mid x \in b\}$. Analog dazu definieren wir die Funktion $f'': \mathfrak{P}\mathfrak{P}a \to \mathfrak{P}\mathfrak{P}n$ als diejenige Funktion, die einem Element $b \in \mathfrak{P}\mathfrak{P}a$ die Menge $\{f'(x) \in \mathfrak{P}n \mid x \in b\}$ zuordnet. Sei nun $b \subseteq \mathfrak{P}a$ gegeben. Wir betrachten $f''(b) \subseteq \mathfrak{P}n$. Weil n endlich ist, muss $f''(b)$ ein minimales Element c besitzen. Nach Definition von f'' existiert ein $x \in b$ so dass $c = f'(x)$. Sei nun $y \in b$ mit $y \subseteq x$. Dann ist $f'(y) \subseteq f'(x) = c$. Weil $f'(y) \in f''(b)$ ist und x minimal war, muss $f'(y) = f'(x)$ gelten. Weil f eine Bijektion ist, folgt $y = x$. Also besitzt b das Minimale Element x. Daraus folgt, dass a endlich ist.

Übung C.2. Man beweise, dass die Klasse aller endlichen Mengen eine echte Klasse ist.

Lösung: Sei $a = \{x\}$ eine Einermenge, d.h. $\forall y \in a \cdot x = y$. Dann ist $\mathfrak{P}a = \{\emptyset, a\}$. Jede nichtleere Teilmenge $b \subseteq \mathfrak{P}a$ ist nun gleich $\{\emptyset\}$ oder gleich $\{a\}$ oder gleich $\{\emptyset, a\}$. Weil jedes solche b ein kleinstes Element hat, ist a nach Definition endlich. Falls die Klasse aller endlichen Mengen eine Menge wäre, so wäre die Klasse aller Einermengen als Teilklasse ebenfalls eine Menge. Dies ist jedoch falsch, wie wir in der Aufgabe A.3 gezeigt haben. Also ist die Klasse aller endlichen Mengen eine echte Klasse.

Übung C.3. Sei a eine endliche Menge. Man beweise, dass $\mathfrak{P}a$ endlich ist.

Lösung: Wir betrachten die Menge

$$b := \{x \subseteq a \mid \mathfrak{P}x \text{ ist endlich}\}.$$

Es gilt $\emptyset \in b$. Sei nun $c \in b$ und $y \in a$. Falls $y \in c$ ist, so ist $c \cup \{y\} = c \in b$. Andernfalls gilt $\mathfrak{P}(c \cup \{y\}) = \mathfrak{P}(c) \cup \{d \cup \{y\} \mid d \in \mathfrak{P}(c)\}$. Weil die Vereinigung endlicher Mengen endlich ist, ist $\mathfrak{P}(c \cup \{y\})$ endlich. Also ist $c \cup \{y\} \in b$. Weil a endlich ist folgt aus Satz 11.1 dass $a \in b$ liegt, also dass $\mathfrak{P}a$ endlich ist.

Übung C.4. Seien a, b endliche Mengen. Man beweise, dass $a \times b$ endlich sind.

Lösung: Nach Satz 11.3 aus der Vorlesung ist $a \cup b$ endlich. Nach der obigen Aufgabe 3 ist dann auch $\mathfrak{P}\mathfrak{P}(a \cup b)$ endlich. Schliesslich ist mit Satz 11.4 der Vorlesung auch $a \times b \subseteq \mathfrak{P}\mathfrak{P}(a \cup b)$ endlich.

Übung C.5. Man beweise, dass endliche Vereinigungen von endlichen Mengen endlich sind.

Lösung: Wir benutzen Satz 11.1 aus der Vorlesung. Sei A eine endliche Menge endlicher Mengen. Wir wollen zeigen, dass $a := \bigcup A$ endlich ist. Sei $b \subseteq \mathfrak{P}a$ so dass $\emptyset \in b$ und $\forall c \in b \cdot \forall x \in a \cdot c \cup \{x\} \in b$ gilt. Für alle $y \in A$ gilt dann $\emptyset \in b \cap \mathfrak{P}y$ und $\forall c \in b \cap \mathfrak{P}y \cdot \forall x \in y \cdot c \cup \{x\} \in b \cap \mathfrak{P}y$. Weil nun aber y endlich ist, folgt daraus $y \in b \cap \mathfrak{P}y \subseteq b$. Weil das für jedes $y \in A$ zutrifft, folgt daraus $a \in b$, also ist a nach Satz 11.1 endlich.

Übung C.6. Sei $F\colon \Omega \to \Omega$ eine Funktion und a endlich. Man beweise, dass $F[a]$ eine endliche Menge ist, ohne das Ersetzungsaxiom zu verwenden[1].

Lösung: Sei $b \subseteq \mathfrak{P}F[a]$. Wir definieren

$$b' := \{F^{-1}(c) \mid c \in b\} \subseteq \mathfrak{P}a.$$

Weil a endlich ist, existiert ein minimales Element $d \in b'$. Dann ist $F[d] \in b$. Sei nun $c \in b$ so dass $c \subseteq F[d]$ ist. Dann folgt $F^{-1}(c) \subseteq d$, also muss $F^{-1}(c) = d$ sein, weil d minimal ist. Dann folgt $c = F[d]$. Also ist $F[d]$ ein minimales Element von b. Daher ist $F[a]$ endlich.

Übung C.7. Man beweise, dass die Klasse $C = \{x \mid x \text{ ist transitiv und } x \notin x\}$ induktiv ist.

Lösung: Weil $\emptyset \notin \emptyset$ gilt, ist $\emptyset \in C$. Sei nun $x \in C$. Dann gilt $x \notin x$, also ist $x \cup \{x\} \neq x$. Falls nun $x \cup \{x\} \in x \cup \{x\}$ gelten würde, so würde $x \cup \{x\} \in x$ folgen. Aus der Transitivität von x folgt $x \cup \{x\} \subseteq x$. Also folgt $x \in x$, was ein Widerspruch ist. Daher muss $x \cup \{x\} \notin x \cup \{x\}$ gelten. Sei nun $y \in x \cup \{x\}$. Falls $y = x$ ist, so folgt $y \subseteq x \cup \{x\}$. Andernfalls ist $y \in x$, also $y \subseteq x \subseteq x \cup \{x\}$ weil x transitiv ist. Es folgt, dass $x \cup \{x\}$ ebenfalls transitiv ist., also gilt $x \cup \{x\} \in C$ Wir folgern daraus, dass C induktiv ist.

Übung C.8. Man beweise, dass

$$\forall (m \in \omega) \cdot \forall (n \in \omega) \cdot \big((m^{\mathsf{N}} = n^{\mathsf{N}}) \to (m = n) \big).$$

Lösung: Seien $m, n \in \omega$ mit $m^{\mathsf{N}} = n^{\mathsf{N}}$. Angenommen, es gilt $m \neq n$. Dann ist wegen $m \in m \cup \{m\} = n \cup \{n\}$ auch $m \in n$. Wegen der unteren Aufgabe ist aber n transitiv, also folgt $m \subseteq n$. Wir können das ganze jetzt umkehren und erhalten mit der genau gleichen Argumentation $n \subseteq m$. Daraus folgt $m = n$.

Übung C.9. Man beweise, dass jedes $n \in \omega$ transitiv ist.

[1] Dies impliziert, dass das Ersetzungsaxiom überflüssig ist, wenn man sich auf endliche Mengen einschränkt.

Lösung: Dies folgt direkt aus Aufgabe 7. Alternativ können wir die Aussage aber auch wie folgt beweisen:
Wir definieren die Menge

$$M := \{x \in \omega \mid x \text{ ist transitiv}\}.$$

Wir zeigen, dass M eine induktive Menge ist. Die leere Menge $\emptyset$ ist transitiv, also ein Element von M. Sei $x \in M$ gegeben. Sei $y \in x \cup \{x\}$. Falls $y \in x$ ist, so folgt aus der Transitivität von x, dass $y \subseteq x \subseteq x \cup \{x\}$ gilt. Andernfalls ist $y \in \{x\}$, also $y = x$ und es gilt ebenfalls $y \subseteq x \cup \{x\}$. Also ist $x \cup \{x\}$ transitiv, also ein Element von M. Wir folgern, dass M induktiv ist, also gilt $\omega \subseteq M$ und jedes Element aus ω ist transitiv.

Übung C.10. Man beweise, dass $\in$ eine konnexe Ordnungen auf ω ist, d.h.

$$\forall(m \in \omega) \cdot \forall(n \in \omega) \cdot \big((m \in n) \vee (m = n) \vee (n \in m)\big).$$

Lösung: Zuerst beweisen wir, dass für alle $n, m \in \omega$ gilt $n \subseteq m \Rightarrow n \in m \vee n = m$. Dazu betrachten wir die Menge

$$M := \{m \mid \forall n \subseteq m \colon n \in m \vee n = m\}.$$

Es gilt $\emptyset \in M$. Sei nun $m \in M$. Angenommen, es gilt $n \subseteq m \cup \{m\}$. Falls $m \in n$ ist, so folgt aus der Transitivität von n (Aufgabe 9) dass $m \subseteq n$ ist. Dann folgt $m \cup \{m\} \subseteq n \subseteq m \cup \{m\}$, also Gleichheit. Falls $m \notin n$ ist, so folgt $n \subseteq m$, also $n \in m$ oder $n = m$. In beiden Fällen folgt $n \in m \cup \{m\}$. Also ist M induktiv und somit $\omega \subseteq M$.
Nun betrachte die Menge

$$N := \{m \in \omega \mid \forall n \in \omega \cdot m \in n \vee m = n \vee n \in m\}.$$

Es gilt $\emptyset \in N$. Sei $m \in N$ und wähle ein beliebiges $n \in \omega$. Dann gilt $m \in n$ oder $m = n$ oder $n \in m$. Im ersten Fall folgt aus der Transitivität von n, dass $m \subseteq n$ und somit $m \cup \{m\} \subseteq n$ gilt. Also folgt mit dem obigen Resulat $m \cup \{m\} \in n$ oder $m \cup \{m\} = n$. Im zweiten Fall $m = n$ folgt $n \in m \cup \{m\}$. Im dritten Fall $n \in m$ folgt $n \in m \cup \{m\}$. Also ist in jedem Fall $m \cup \{m\} \in N$. Somit ist N induktiv, also gilt $\omega \subseteq N$. Wir folgern daraus die Aussage der Aufgabe.

Übung C.11. Man beweise, dass jede nichtleere $a \subset \omega$ hat ein kleinstes Element bzl. $\in$.

Lösung: Angenommen, die nicht-leere Menge $a \subseteq \omega$ hat kein kleinstes Element. Wir betrachten die Menge

$$M := \{n \in \omega \mid \forall x \in a \colon n \in x\}.$$

Es gilt $\emptyset \in M$. Sei $n \in M$ und sei $x \in a$. Dann gilt $n \in x$, also folgt wegen der Transitivität von x auch $n \cup \{n\} \subseteq x$. Wegen dem Resultat im Beweis der Aufgabe

10 oben folgt $n \cup \{n\} \in x$ oder $n \cup \{n\} = x$. Falls der zweite Fall eintritt, so folgt für jedes $y \in a$ wegen $n \in y$ auch $x = n \cup \{n\} \in y$ oder $x = n \cup \{n\} = y$. Dann wäre x ein kleinstes Element von a, im Widerspruch zur Annahme. Daraus folgt, dass dieser zweite Fall nie eintritt. Daher ist die Menge M induktiv. Also ist $\omega \subseteq M$. Weil nach Satz 12.3. für jedes Element $x \in a$ aber $x \notin x$ gilt, folgt, dass $a \cap M = \emptyset$ ist. Dann muss aber $a = \emptyset$ sein im Widerspruch zur Voraussetzung.