ÜBUNG D.1. Sei a eine Menge. Man beweise, dass die folgenden drei Bedingungen äquivalent sind:

1. a ist transitiv;
2. $\bigcup a \subseteq a$;
3. $a \subseteq \mathfrak{P} a$.

Lösung: Wir zeigen "1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 1.". Angenommen a ist transitiv. Sei $x \in \bigcup a$. Dann existiert ein $y \in a$ mit $x \in y$. Weil a transitiv ist, gilt nun $y \subseteq a$, also folgt $x \in a$. Wir folgern $\bigcup a \subseteq a$.
Nehmen wir nun an, dass $\bigcup a \subseteq a$ gilt. Sei $x \in a$. Dann folgt $x \subseteq \bigcup a \subseteq a$, also ist $x \in \mathfrak{P} a$. Daher folgt $a \subseteq \mathfrak{P} a$.
Schliesslich nehmen wir an, dass $a \subseteq \mathfrak{P} a$ gilt. Sei $x \in a$. Dann folgt $x \in \mathfrak{P} a$, also ist $x \subseteq a$. Wir folgern, dass a transitiv ist.

ÜBUNG D.2. Man beweise, dass jede Ordinalzahl erblich transitiv ist[1].

Lösung: Sei α eine Ordinalzahl. Dann ist α nach Definition transitiv. Sei nun $x \in \alpha$. Für jedes $y \in x$ ist wegen der Transitivität von α auch $y \in \alpha$ und daher auch $y \subseteq \alpha$. Sei nun $z \in y$. Dann folgt $z \in \alpha$ und weil α total geordnet ist bezüglich $\in_\alpha$, gilt $z \in x$ oder $x \in z$. Falls $x \in z$ wäre, dann würde $x \in z \in y \in x$ folgen, was ein Widerspruch zur Totalordnung auf α ist. Also muss $z \in x$ gelten. Wir folgern, dass $y \subseteq x$ ist, also ist auch x transitiv. Daher ist α erblich transitiv.

ÜBUNG D.3. Man beweise, dass Ord eine echte Klasse ist.

Lösung: Wir zeigen, dass falls Ord eine Menge wäre, dann wäre es selber eine Ordinalzahl. Sei $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Für jedes $\beta \in \alpha$ ist β nach Satz 15.4 aus der Vorlsung ebenfalls eine Ordinalzahl, also folgt $\alpha \subseteq \mathsf{Ord}$. Daher ist Ord transitiv. In Satz 15.6 aus der Vorlesung wird gezeigt, dass Ord wohlgeordnet ist. Daher folgern wir, dass angenommen Ord ist eine Menge, dann ist Ord eine Ordinalzahl, enthält sich also selber. Nun folgt aber aus Satz 15.3 der Vorlesung ein Widerspruch. Daher kann Ord keine Menge sein.

ÜBUNG D.4. Sei a eine induktive Menge. Man beweise, dass $a \cap \mathsf{Ord}$ auch induktiv ist.

Lösung: Nach Satz 15.2 der Vorlesung ist Ord eine induktive Klasse. Als Schnitt einer induktiven Menge mit einer induktiven Klasse ist $a \cap \mathsf{Ord}$ auch eine induktive Menge.

[1] Tatsächlich kann man mithilfe des Fundierungsaxioms beweisen, dass die Ordinalzahlen genau die erblich transitiven Mengen sind, vgl. Übung G.1.

ÜBUNG D.5. Sei C eine Klasse mit $C \cap \mathsf{Ord} \neq \emptyset$. Man beweise, dass es ein $\alpha \in C \cap \mathsf{Ord}$ gibt, so dass
$$\forall(\beta \in \mathsf{Ord}) \cdot \big((\beta < \alpha) \to (\beta \notin C)\big)$$
gilt.

Lösung: Sei $\alpha \in C \cap \mathsf{Ord}$, also insbesondere eine Ordinalzahl. Angenommen, es sei $\alpha \cap (C \cap \mathsf{Ord}) = \emptyset$. Sei $\beta \in \mathsf{Ord}$ mit $\beta < \alpha$. Falls $\beta \in C$ wäre, dann wäre $\beta \in \alpha \cap (C \cap \mathsf{Ord})$, was nach Annahme nicht sein kann. Also muss $\beta \notin C$ gelten. Nehmen wir nun umgekehrt an, dass $\alpha \cap (C \cap \mathsf{Ord}) \neq \emptyset$ gilt. Weil α eine Menge ist, ist $\alpha \cap (C \cap \mathsf{Ord})$ eine Menge von Ordinalzahlen, besitzt also ein kleinstes Element $\alpha' \in C$. Nun gilt
$$\forall \beta \in \mathsf{Ord} \cdot ((\beta < \alpha') \to (\beta \notin C))$$
also auch in diesem Fall, wie gewünscht.

ÜBUNG D.6. Man beweise die Äquivalenz folgender Bedingungen für $\alpha \in \mathsf{Ord}$:

1. α ist Limeszahl,
2. $\forall(\beta < \alpha) \cdot (\beta + 1) < \alpha$,
3. $\bigcup \alpha = \alpha$.

Lösung: Angenommen α ist eine Limeszahl. Sei $\beta < \alpha$, also $\beta \in \alpha$. Weil α transitiv ist, muss $\beta \subseteq \alpha$ gelten. Daraus folgt $\beta + 1 \subseteq \alpha$. Weil α eine Limeszahl ist, muss $\beta + 1 \neq \alpha$ gelten. Nach Satz 15.5 aus der Vorlesung folgt dann $\beta + 1 < \alpha$. Daraus folgt “1. $\Rightarrow$ 2.”.
Angenommen, für alle $\beta < \alpha$ gilt $\beta + 1 < \alpha$. Nach Übung D.1 folgt, weil α als Ordinalzahl transitiv ist, auch $\bigcup \alpha \subseteq \alpha$. Umgekehrt sei $x \in \alpha$. Dann folgt $x + 1 \in \alpha$ nach Voraussetzung. Also ist wegen $x \in x + 1$ dann $x \in \bigcup \alpha$. Daraus folgt $\bigcup \alpha = \alpha$, also “2. $\Rightarrow$ 3.”.
Angenommen, es gilt $\bigcup \alpha = \alpha$. Falls nun eine Ordinalzahl β existieren würde mit $\beta + 1 = \alpha$, dann folgt $\beta \in \alpha$, aber für jedes $\gamma \in \alpha$ gilt $\beta \notin \gamma$. Also ist $\beta \notin \bigcup \alpha$, ein Widerspruch zur Annahme. Also ist α eine Limeszahl. Dies zeigt “3. $\Rightarrow$ 1.” und damit die Äquivalenz der drei Aussagen.

ÜBUNG D.7. Man beweise, dass ω eine Limeszahl ist. Man beweise außerdem, dass ω die kleinste nichtleere Limeszahl ist, und dass die natürlichen Zahlen genau die Ordnungszahlen kleiner als ω sind.

Lösung: Aus Satz 15.1 wissen wir, dass ω eine Ordinalzahl ist und aus Satz 12.1, dass ω induktiv ist. Also folgt, dass für jede Zahl $\alpha \in \omega$ auch $\alpha + 1 \in \omega$ ist, also kann $\alpha + 1 = \omega$ nicht gelten. Somit ist ω eine Limeszahl. Angenommen es gäbe eine kleinere Limeszahl $\alpha \in \omega$. Dann folgt aus Übung D.6, dass α eine induktive Menge ist. Also folgt $\omega \subseteq \alpha$, im Widerspruch zur Annahme. Um die letzte Behauptung zu zeigen, bemerken wir dass jede Ordnungszahl, die kleiner als ω ist, nach Definition in ω enthalten ist, also eine natürliche Zahl ist.