ÜBUNG E.1. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{Ord}$ mit $\alpha < \beta$. Man beweise:

1. $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.
2. $\alpha \bullet \gamma \leq \beta \bullet \gamma$.
3. $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

Lösung: Wir zeigen das Gewünschte jeweils per Induktion.

1. Für $\gamma = 0$ gilt die Aussage nach Annahme. Angenommen $\gamma = \gamma' + 1$ ist eine Nachfolgerzahl. Dann folgt wegen $\gamma' < \gamma$ durch Induktion $\alpha + \gamma' \leq \beta + \gamma'$. Daraus folgt direkt aus der Definition von Nachfolgerzahl $\alpha + \gamma = \alpha + \gamma' + 1 \leq \beta + \gamma' + 1 = \beta + \gamma$. Nehmen wir nun an, dass γ eine Limeszahl ist. Für jede Ordinalzahl $\delta < \gamma$ gilt dann $\alpha + \delta \leq \beta + \delta$ durch Induktion. Es folgt wegen $\beta + \gamma = \sup\{\beta + \eta \mid \eta < \gamma\}$ dann auch $\alpha + \delta \leq \beta + \gamma$. Weil das für alle δ gilt, muss es auch für das Supremum gelten, also folgt $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

2. Für $\gamma = 0$ gilt die Aussage nach Annahme. Angenommen $\gamma = \gamma' + 1$ ist eine Nachfolgerzahl. Dann folgt wegen $\gamma' < \gamma$ durch Induktion $\alpha \bullet \gamma' \leq \beta \bullet \gamma'$. Daraus folgt mit Teil 1. und Satz 20.3 aus der Vorlesung:

$$\alpha \bullet \gamma = \alpha \bullet \gamma' + \alpha \leq \beta \bullet \gamma' + \alpha \leq \beta \bullet \gamma' + \beta = \beta \bullet \gamma.$$

   Nehmen wir nun an, dass γ eine Limeszahl ist. Für jede Ordinalzahl $\delta < \gamma$ gilt dann $\alpha \bullet \delta \leq \beta \bullet \delta$ durch Induktion. Es folgt wegen $\beta \bullet \gamma = \sup\{\beta \bullet \eta \mid \eta < \gamma\}$ dann auch $\alpha \bullet \delta \leq \beta \bullet \gamma$. Weil das für alle δ gilt, muss es auch für das Supremum gelten, also folgt $\alpha \bullet \gamma \leq \beta \bullet \gamma$.

3. Für $\gamma = 0$ gilt die Aussage nach Annahme. Angenommen $\gamma = \gamma' + 1$ ist eine Nachfolgerzahl. Dann folgt wegen $\gamma' < \gamma$ durch Induktion $\alpha^{\gamma'} \leq \beta^{\gamma'}$. Daraus folgt mit Teil 2. und Satz 20.5 aus der Vorlesung:

$$\alpha^\gamma = \alpha^{\gamma'} \bullet \alpha \leq \beta^{\gamma'} \bullet \alpha \leq \beta^{\gamma'} \bullet \beta = \beta^\gamma.$$

   Nehmen wir nun an, dass γ eine Limeszahl ist. Für jede Ordinalzahl $\delta < \gamma$ gilt dann $\alpha^\delta \leq \beta^\delta$ durch Induktion. Es folgt wegen $\beta^\gamma = \sup\{\beta^\eta \mid \eta < \gamma\}$ dann auch $\alpha^\delta \leq \beta^\gamma$. Weil das für alle δ gilt, muss es auch für das Supremum gelten, also folgt $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

ÜBUNG E.2. Man finde für jeden der folgenden Fälle Ordinalzahlen (nicht notwendigerweise jedes Mal die gleiche Ordinalzahlen), so dass sich ergibt:

1. $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$.
2. $\alpha \bullet \beta \neq \beta \bullet \alpha$.
3. $(\alpha + \beta) \bullet \gamma \neq \alpha \bullet \gamma + \beta \bullet \gamma$.
4. $(\alpha \bullet \beta)^\gamma \neq \alpha^\gamma \bullet \beta^\gamma$.

5. $\alpha < \beta$ und $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

6. $\alpha < \beta$, $\gamma > 0$, und $\alpha \bullet \gamma = \beta \bullet \gamma$,

7. $\alpha < \beta$ und $\gamma > 0$, und $\alpha^\gamma = \beta^\gamma$.

Man beweise, dass jedoch alle sieben Aussagen falsch sind, wenn α, β und γ alles $< \omega$ sein müssen.

Lösung:

1. Es gilt $1 + \omega = \omega = \omega + 0 < \omega + 1$, also muss $1 + \omega \neq \omega + 1$ sein.

2. Es gilt $2 \bullet \omega = \omega < \omega + \omega = \omega \bullet 2$, also muss $2 \bullet \omega \neq \omega \bullet 2$ gelten.

3. Es gilt $(\omega+1)\bullet 2 = \omega+1+\omega+1 = \omega+\omega+1 = \omega\bullet 2+1 < \omega\bullet 2+2 = \omega\bullet 2+1\bullet 2$.

4. Es gilt $(\omega \bullet 2)^2 = \omega \bullet 2 \bullet \omega \bullet 2 = \omega \bullet \omega \bullet 2 < \omega \bullet \omega \bullet 4 = \omega^2 \bullet 2^2$.

5. Es gilt $0 < 1$, aber $0 + \omega = 1 + \omega$.

6. Es gilt $1 < 2$ und $\omega > 0$, aber $1 \bullet \omega = 2 \bullet \omega$.

7. Es gilt $2 < 3$ und $\omega > 0$, aber $2^\omega = 3^\omega$.

Aus der Vorlesung Satz 17.2 wissen wir, dass ω die kleinste Limeszahl ist. Das heisst, wir müssen nur beweisen, dass falls $\alpha = \alpha' + 1, \beta = \beta' + 1, \gamma = \gamma' + 1$ alles Nachfolgerzahlen sind, die obigen Aussagen stimmen:

1. Wir zeigen zuerst $1+\alpha = \alpha+1$ für jede Nachfolgerzahl α durch Induktion. Für $\alpha = 0$ ist die Aussage wahr. Für $\alpha > 0$ ist $1+\alpha = 1+\alpha'+1 = \alpha'+1+1 = \alpha+1$ wegen Induktion. Also folgt die Aussage. Nun nutzen wir Induktion nach β. Für $\beta = 0$ ist die Aussage wahr. Für $\beta > 0$ ist $\alpha+\beta = \alpha+\beta'+1 = \beta'+\alpha+1 = \beta' + 1 + \alpha = \beta + \alpha$, wie gewünscht.

2. Wir nutzen eine Doppelinduktion nach α und β. Für $\alpha = 0 = \beta$ stimmt die Aussage. Nun gilt mit dem Induktionsschritt $\alpha \bullet \beta = \alpha \bullet \beta' + \alpha = \beta' \bullet \alpha + \alpha = \beta' \bullet \alpha' + \beta' + \alpha' + 1$. Wegen Teil 1. ist dies nun gleich $\alpha' \bullet \beta' + \alpha' + \beta' + 1 = \alpha' \bullet \beta + \beta = \beta \bullet \alpha' + \beta = \beta \bullet \alpha$.

3. Wir nutzen die zweite Teilaufgabe und erhalten $(\alpha + \beta) \bullet \gamma = \gamma \bullet (\alpha + \beta) = \gamma \bullet \alpha + \gamma \bullet \beta = \alpha \bullet \gamma + \beta \bullet \gamma$.

4. Wir machen eine Induktion nach γ. Für $\gamma = 0$ ist die Aussage richtig. Nun gilt dank dem Induktionsschritt und wegen Teilaufgabe 2 $(\alpha\bullet\beta)^\gamma = (\alpha\bullet\beta)^{\gamma'} \bullet \alpha \bullet \beta = \alpha^{\gamma'} \bullet \beta^{\gamma'} \bullet \alpha \bullet \beta = \alpha^{\gamma'} \bullet \alpha \bullet \beta^{\gamma'} \bullet \beta = \alpha^\gamma \bullet \beta^\gamma$.

5. Mit Teilaufgabe 1. und Satz 20.3 folgt $\alpha + \gamma = \gamma + \alpha < \gamma + \beta = \beta + \gamma$.

6. Mit Teilaufgabe 2. und Satz 20.5 folgt $\alpha \bullet \gamma = \gamma \bullet \alpha < \gamma \bullet \beta = \beta \bullet \gamma$.

7. Wir nutzen Induktion nach γ. Für $\gamma = 0$ ist die Aussage richtig. Mit Induktion und Teilaufgabe 6. folgt nun $\alpha^\gamma = \alpha^{\gamma'} \bullet \alpha < \beta^{\gamma'} \bullet \alpha < \beta^{\gamma'} \bullet \beta = \beta^\gamma$.

Übung E.3. Man beweise die folgenden **Distributivgesetze**:

1. $\alpha \bullet (\beta + \gamma) = \alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma$.
2. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \bullet \alpha^{\gamma}$.
3. $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \bullet \gamma}$.

Lösung:

1. Wir nutzen Induktion nach γ. Für $\gamma = 0$ ist die Aussage klar. Sei $\gamma > 0$. Falls $\gamma = \gamma' + 1$ eine Nachfolgerzahl ist, so folgt mittels Induktionsschritt $\alpha \bullet (\beta + \gamma) = \alpha \bullet (\beta + \gamma') + \alpha = \alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma' + \alpha = \alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma$. Falls γ eine Limeszahl ist, so ist wegen Satz 20.1 auch $\beta + \gamma$ eine Limeszahl und es gilt $\alpha \bullet (\beta + \gamma) = \sup\{\alpha \bullet \delta \mid \delta < \beta + \gamma\} = \sup\{\alpha \bullet (\beta + \eta) \mid \eta < \gamma\} = \alpha \bullet \beta + \sup\{\alpha \bullet \eta \mid \eta < \gamma\} = \alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma$.
2. Wir nutzen Induktion nach γ. Für $\gamma = 0$ ist die Aussage klar. Sei $\gamma > 0$. Falls $\gamma = \gamma' + 1$ eine Nachfolgerzahl ist, so folgt mittels Induktionsschritt $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma'} \bullet \alpha = \alpha^{\beta} \bullet \alpha^{\gamma'} \bullet \alpha = \alpha^{\beta} \bullet \alpha^{\gamma}$. Falls γ hingegen eine Limeszahl ist, so ist wegen Satz 20.1 auch $\beta + \gamma$ eine Limeszahl und es gilt $\alpha^{\beta+\gamma} = \sup\{\alpha^{\delta} \mid \delta < \beta + \gamma\} = \sup\{\alpha^{\beta+\eta} \mid \eta < \gamma\} = \alpha^{\beta} \bullet \sup\{\alpha^{\eta} \mid \eta < \gamma\} = \alpha^{\beta} \bullet \alpha^{\gamma}$.
3. Wir nutzen Induktion nach γ. Für $\gamma = 0$ ist die Aussage klar. Sei $\gamma > 0$. Falls $\gamma = \gamma' + 1$ eine Nachfolgerzahl ist, so folgt mittels Induktionsschritt $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = (\alpha^{\beta})^{\gamma'} \bullet \alpha^{\beta} = \alpha^{\beta \bullet \gamma'} \bullet \alpha^{\beta}$ was wegen Teilaufgabe 2. gleich $\alpha^{\beta \bullet \gamma' + \beta} = \alpha^{\beta \bullet \gamma}$ ist. Falls γ hingegen eine Limeszahl ist, so ist wegen Satz 20.1 auch $\beta + \gamma$ eine Limeszahl und es gilt $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \sup\{(\alpha^{\beta})^{\delta} \mid \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha^{\beta \bullet \delta} \mid \delta < \gamma\} = \alpha^{\beta \bullet \gamma}$.

Übung E.4. Seien $(a, <_a)$ und $(b, <_b)$ zwei total geordnete Mengen. Wir definieren eine Relation $\prec$ auf $c := a \times b$ durch:

$$(x, y) \prec (z, w) \quad \text{g.d.w.} \quad \begin{array}{l} x <_a z, \\ \text{oder } x = z \text{ und } y <_b w. \end{array}$$

1. Man beweise, dass $\prec$ eine totale Ordnung ist.
2. Nun angenommen, dass sowohl $(a, <_a)$ als auch $(b, <_b)$ wohlgeordnet sind. Man beweise, dass $(c, \prec)$ auch wohlgeordnet ist.
3. Angenommen weiter, dass $(a, <_a)$ bzw. $(b, <_b)$ die Ordnungstypen α bzw. β haben. Man beweise, dass $(c, \prec)$ die Ordnungstyp $\alpha \bullet \beta$ hat.

Lösung:

1. Seien $(x, y), (z, w) \in a \times b$. Weil a total geordnet ist, gilt $x < z$ oder $z < x$ oder $x = z$. Im ersten Fall ist $(x, y) \prec (z, w)$. Im zweiten Fall ist $(z, w) \prec (x, y)$. Falls hingegen $x = z$ gilt, so ist wegen der Totalordnung von b entweder $y < w$ oder $y > w$ oder $y = w$. Im ersten Fall folgt $(x, y) \prec (z, w)$, im zweiten Fall $(z, w) \prec (x, y)$ und im dritten folgt $(x, y) = (z, w)$. Also ist $\prec$ eine Totalordnung auf $a \times b$.

2. Sei $d \subseteq c$ eine nichtleere Teilmenge. Sei $d_a := \{x \in a \mid \exists y \in b \cdot (x, y) \in d\}$. Weil d nichtleer ist, ist auch d_a nichtleer, sie besitzt also ein kleinstes Element $x_0 \in d_a$. Die Menge $\{y \in b \mid (x_0, y) \in d\}$ ist nun eine ebenfalls nichtleere Teilmenge von b, besitzt also ein kleinstes Element y_0. Nun gilt $(x_0, y_0) \in d$. Wir behaupten, dass (x_0, y_0) ein kleinstes Element in d ist. Angnommen es gäbe $(z, w) \in d$ mit $(z, w) \prec (x_0, y_0)$. Weil x_0 ein kleinstes Element in d_a war, folgt $x_0 = z$. Dann muss aber $w < y_0$ sein, was ein Widerspruch zu Wahl von y_0 ist. Also ist (x_0, y_0) tatsächlich ein kleinstes Element von d und wir folgern, dass c wohlgeordnet ist.

3. Wir nutzen Induktion nach β. Für $\beta = 0$ und $b = \emptyset$ ist die Aussage wahr. Angenommen, $\beta = \beta' + 1$ ist eine Nachfolgerzahl. Das Element $\beta' \in \beta$ ist ein maximales Element, also besitzt auch b ein maximales Element y. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Ordnungsisomorphismus $f\colon a \times (b \setminus \{y\}) \to \alpha \bullet \beta'$. Nun gilt $a \times b = a \times (b \setminus \{y\}) \cup a \times \{y\}$ und $a \times \{y\}$ ist ordnungsisomorph zu a, hat also Ordnungstyp α. Mit Aufgabe E.5.3 folgt, dass $a \times b$ Ordnungstyp $\alpha \bullet \beta' + \alpha = \alpha \bullet \beta$ hat. Nehmen wir nun an, dass β eine Limeszahl ist. Für jedes Element $\lambda < \beta$ sei $y_\lambda \in b$ das zugehörige Element und sei b_{y_λ} das Anfangsstück. Durch Induktion folgt, dass ein Ordnungsisomorphismus $f_\lambda\colon a \times (b_{y_\lambda}) \to \alpha \bullet \lambda$ existiert. Zudem gilt für alle $\gamma < \lambda < \beta$ auch $f_\gamma \subseteq f_\lambda$. Nun gilt $\alpha \bullet \beta = \bigcup_{\lambda<\beta}(\alpha \bullet \lambda)$, also ist $f := \bigcup_{\lambda<\beta} f_\lambda$ ein Ordnungsisomorphismus von c nach $\alpha \bullet \beta$.

Übung E.5. Seien $(a, <_a)$ und $(b, <_b)$ zwei total geordnete Mengen mit $a \cap b = \emptyset$. Wir definieren eine Relation $\prec$ auf $c := a \cup b$ durch:

$$x \prec y \qquad \text{g.d.w.} \qquad \begin{array}{l} x, y \in a \text{ und } x <_a y, \\ \text{oder } x, y \in b \text{ und } x <_b y, \\ \text{oder } x \in a \text{ und } y \in b. \end{array}$$

1. Man beweise, dass $\prec$ eine totale Ordnung ist.

2. Nun angenommen, dass sowohl $(a, <_a)$ als auch $(b, <_b)$ wohlgeordnet sind. Man beweise, dass $(c, \prec)$ auch wohlgeordnet ist.

3. Angenommen weiter, dass $(a, <_a)$ bzw. $(b, <_b)$ die Ordnungstypen α bzw. β haben. Man beweise, dass $(c, \prec)$ die Ordnungstyp $\alpha + \beta$ hat.

Lösung:

1. Seien $x, y \in c$ mit $x \neq y$. Dann gibt es die Fälle $x, y \in a$ oder $x \in a, y \in b$ oder $y \in a, x \in b$ oder $x, y \in b$. Im ersten Fall ist wegen der Totalordnung von a entweder $x < y$ oder $y > x$. Es folgt $x \prec y$ oder $y \prec x$. Im zweiten Fall folgt direkt $x \prec y$. Im dritten Fall folgt direkt $y \prec x$. Im vierten Fall folgt $x < y$ oder $y < x$, also $x \prec y$ oder $y \prec x$. Es folgt, dass immer $x \prec y$ oder $y \prec x$ gelten muss. Also ist $\prec$ eine Totalordnung.

2. Sei $d \subseteq c$ eine nichtleere Menge. Falls $d \subseteq b$ ist, dann besitzt d ein kleinstes Element, das auch das kleinste Element bezüglich $\prec$ ist. Andernfalls sei x

das kleinste Element von $d \cap a$. Dann ist direkt aus der Definition von $\prec$ das Element x auch ein kleinstes Element in d. Also ist c wohlgeordnet.

3. Wir nutzen Induktion nach β. Für $\beta = 0$ und $b = \emptyset$ ist die Aussage wahr. Angenommen, $\beta = \beta' + 1$ ist eine Nachfolgerzahl. Das Element $\beta' \in \beta$ ist ein maximales Element, also besitzt auch b ein maximales Element y. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Ordnungsisomorphismus $f\colon a \cup b \setminus \{y\} \to \alpha + \beta'$. Wir erweitern diesen Isomorphismus indem wir $f(y) := \alpha + \beta' \in \alpha + \beta' + 1 = \alpha + \beta$ setzen. Dies ist wiederum ein Ordnungsisomorphismus von c nach $\alpha + \beta$ und zeigt, dass c den Ordnungstyp $\alpha + \beta$ hat. Nehmen wir nun an, dass β eine Limeszahl ist. Für jedes Element $\lambda < \beta$ sei $y_\lambda \in b$ das zugehörige Element und sei b_{y_λ} das Anfangsstück. Durch Induktion folgt, dass ein Ordnungsisomorphismus $f_\lambda\colon a \cup b_{y_\lambda} \to \alpha + \lambda$ existiert. Zudem gilt für alle $\gamma < \lambda < \beta$ auch $f_\gamma \subseteq f_\lambda$. Nun gilt $\alpha + \beta = \bigcup_{\lambda<\beta}(\alpha + \lambda)$, also ist $f := \bigcup_{\lambda<\beta} f_\lambda$ ein Ordnungsisomorphismus von c nach $\alpha + \beta$.

Übung E.6. Seien $\alpha \leq \beta$ zwei Ordinalzahlen. Man beweise, dass eine eindeutige Ordinalzahl γ existiert, so dass $\alpha + \gamma = \beta$. Man verwendet dies, um die **Subtraktion** von Ordinalzahlen zu definieren. *Hinweis:* Benutze Übung E.5.

Lösung: Weil β eine Ordnungszahl ist, ist sie transitiv, also $\alpha \subseteq \beta$. Wir definieren die Menge $c := \beta \setminus \alpha$. Diese ist als Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ebenfalls wohlgeordnet. Nun ist c ordnungsisomorph zu einer Ordnungszahl γ. Nach Aufgabe E.5 ist der Ordnungstyp von $\beta = \alpha \cup c$ gleich $\alpha + \gamma$. Weil der Ordnungstyp aber eindeutig ist, folgt $\alpha + \gamma = \beta$.

Übung E.7. Sei α eine Ordinalzahl. Man beweise, dass eine eindeutige Limeszahl λ und eine eindeutige natürliche Zahl n existiert, so dass $\alpha = \lambda + n$ gilt.

Lösung: Wir nutzen Induktion nach α. Für $\alpha = 0$ ist die Aussage wahr. Angenommen, die Aussage gilt für alle $\alpha' < \alpha$. Falls α eine Limeszahl ist, so setze $\lambda = \alpha$ und $n = 0$. Falls $\alpha = \alpha' + 1$ hingegen eine Nachfolgerzahl ist, so gibt es mit dem Induktionsschritt eine Limeszahl λ und eine natürliche Zahl n' so dass $\alpha' = \lambda + n'$ gilt. Dann folgt mit $n := n' + 1$ auch $\alpha = \alpha' + 1 = \lambda + n' + 1 = \lambda + n$.

Übung E.8. Sei α eine Ordinalzahl. Man beweise, dass α genau dann eine Limeszahl ist, wenn es eine solche Ordinalzahl β existiert, dass $\alpha = \omega \bullet \beta$ gilt.

Lösung: Wir nutzen Induktion nach α. Für die kleinste Limeszahl ω gilt die Aussage offenbar. Angenommen, α ist eine Limeszahl. Weil ω die kleinste Limeszahl ist, folgt $\omega \leq \alpha$. Dann gibt es nach Teilaufgabe 6 eine Ordinalzahl $\gamma < \alpha$ mit $\omega + \gamma = \alpha$. Mit Induktion ist dies gleich $\omega + \omega \bullet \beta' = \omega \bullet (1 + \beta')$ für eine Ordinalzahl β'. Also ist α von der Form $\omega \bullet \beta$ für $\beta = 1 + \beta'$.
Nehmen wir jetzt umgekehrt eine Ordinalzahl β. Wir wollen zeigen, dass $\omega \bullet \beta$ eine Limeszahl ist. Falls $\beta = \beta' + 1$ eine Nachfolgerzahl ist, folgt $\omega \bullet \beta = \omega \bullet \beta' + \omega$, was

nach Satz 20.1 auch eine Limeszahl ist. Falls β eine Limeszahl ist, so folgt für alle $\gamma < \omega \bullet \beta = \sup\{\omega \bullet \eta \mid \eta < \beta\}$ dass ein $\eta < \beta$ existiert mit $\gamma < \omega \bullet \eta$. Dann gilt aber $\gamma + 1 < \omega \bullet \eta + 1 < \omega \bullet (\eta + 1)$ und weil β eine Limeszahl ist, folgt $\eta + 1 < \beta$. Also folgt $\gamma + 1 < \omega \bullet \beta$. Wir folgern daraus, dass $\omega \bullet \beta$ eine Limeszahl ist.

ÜBUNG E.9. Sei $(a, <)$ eine wohlgeordnete Menge und $H\colon \Omega \to \Omega$ eine Funktion. Man beweise, dass es genau eine Funktion f mit $\mathsf{D}(f) = a$ existiert, so dass für alle $x \in a$:

$$f(x) = H[f_{\restriction a_x}],$$

wobei wie üblich a_x das Anfangsstück $\{y \in a \mid y < x\}$ bezeichnet. *Hinweis*: Ändere den Beweis des Rekursionssatzes.

Lösung: Wir gehen vor wie im Beweis des Rekursionssatzes. Wir behaupten, dass für jede wohlgeordnete Menge a eine eindeutige Folge $f = (f_b)_{b\in a}$ existiert mit

$$\forall(b \in a) \cdot (f_b = H[(f_c)_{c<b}]. \qquad (\star_a)$$

Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Seien $f = (f_b)_{b\in a}$ und $g = (g_b)_{b\in a}$ zwei Lösungen von $(\star_a)$. Sei $c \in a$ die kleinste Zahl so dass $f_c \neq g_c$. Dann gilt

$$f_c = H[(f_d)_{d<c}] = H[(g_d)_{d<c}] = g_c$$

im Widerspruch zur Wahl von c. Also muss $f = g$ sein. Nun wollen wir die Existenz von so einer Folge f zeigen und nutzen Induktion nach a. Für $a = \emptyset$ ist die Aussage wahr. Sei nun a eine wohlgeordnete Menge, die ein Maximales Element $y \in a$ besitzt. Dann ist $a \setminus \{y\}$ ebenfalls wohlgeordnet und nach Induktion existiert eine Folge $(f_b)_{b\in a\setminus\{y\}}$, die $(\star_{a\setminus\{y\}})$ erfüllt. Wir setzen $f_y := H[(f_b)_{b\in a\setminus\{y\}}]$. Dann erfüllt $(f_b)_{b\in a}$ auch $(\star_a)$. Angenommen a besitzt kein maximales Element. Nach Induktion existiert für jedes $x < a$ eine Folge $(f_y)_{y<x}$, die $(\star_x)$ erfüllt. Wegen der Eindeutigkeit fügen sich diese zu einer Folge $(f_b)_{b\in a}$ zusammen, die $(\star_a)$ erfüllt.