In diesem Übungsblatt darf das Fundierungsaxiom in allen Übungen außer Übung F.2 verwendet werden.

Übung F.1. Man beweise, dass jede erblich transitive Menge eine Ordnungszahl ist.

Lösung: Sei α eine erblich transitive Menge. Dann ist α insbesondere auch transitiv. Es bleibt also nur zu zeigen, dass α bezüglich $\in$ wohlgeordnet ist. Wir zeigen zuerst, dass es eine Totalordnung ist. Wir nehmen dafür das Gegenteil an. Dann ist die Menge

$$M := \{x \in \alpha \mid \exists y \in \alpha \cdot (x \notin y) \wedge (y \notin x) \wedge (x \neq y)\}$$

nichtleer, also existiert wegen dem Fundierungsaxiom ein minimales Element x_0. Nun sei y_0 das minimale Element der Menge

$$\{y \in \alpha \mid (x_0 \notin y) \wedge (y \notin x_0) \wedge (x_0 \neq y)\}.$$

Sei nun $z \in y_0$. Wegen der Minimalität von y_0 folgt $z \in x_0$ oder $x_0 \in z$ oder $x_0 = z$. In den letzteren Fällen würde wegen der Transitivität $x_0 \in y_0$ folgen, im Widerspruch zur Wahl von y_0. Also muss $z \in x_0$ gelten. Weil dies für alle $z \in y_0$ so sein muss, folgt $y_0 \subseteq x_0$. Wegen $y_0 \neq x_0$ existiert ein $z \in x_0 \setminus y_0$. Wegen der Minimalität von x gilt $z \in y_0$ oder $y_0 \in z$ oder $y_0 = z$. Der erste Fall ist unmöglich aus der Wahl von z. Aus den beiden anderen Fällen würde aber dann $y_0 \in x_0$ folgen, ein Widerspruch zur Wahl von y_0. Also war unsere Grundannahme falsch, dass die Menge M nichtleer ist. Wir folgern daraus, dass α total geordnet ist. Nun folgt direkt aus dem Fundierungsaxiom, dass jede Teilmenge von α ein minimales Element besitzt, also ist α auch wohlgeorndet und damit eine Ordinalzahl.

Übung F.2. Man beweise, dass die Schlussfolgerung des Hierarchiesatzes äquivalent zum Fundierungsaxiom ist.

Lösung: Der Hierarchiesatz wurde mittels Fundierungsaxiom bewiesen, was die eine Richtung der Äquivalenz zeigt. Nehmen wir nun an, dass der Hierarchiesatz gilt. Sei a eine nicht-leere Menge. Aus dem Hierarchiesatz folgt, dass ein α existiert mit $a \in v_\alpha$. Wir definieren die Menge

$$M := \{\beta < \alpha \mid \exists x \in \alpha \cdot x \in v_\beta\}.$$

Nach Satz 23.1 ist M nicht-leer. Weil M eine Menge von Ordinalzahlen ist, ist M wohlgeordnet. Sei β_0 ein minimales Element von M und sei $x \in a$ so dass $x \in v_{\beta_0}$. Nach Satz 23.1 existiert für jedes $y \in x$ ein $\gamma < \beta_0$ mit $y \in v_\gamma$. Wegen der Minimalität von β_0 folgt dann $y \notin a$. Also gilt $x \cap a = \emptyset$, wie gewünscht.

Übung F.3. Seien a, b Mengen und sei $\alpha \in \mathsf{Ord}$, so dass $\mathsf{R}(a) < \alpha$ und $\mathsf{R}(b) < \alpha$ gilt. Man beweise, dass aller Mengen

$$\{a, b\}, \quad \langle a, b\rangle, \quad a \cup b, \quad \bigcup a, \quad \mathfrak{P}a, \quad b^a$$

einen Rang $< \alpha + \omega$ haben.

Lösung:

1. Es gilt nach Voraussetzung insbesondere $a, b \in v_\alpha$. Also folgt $\{a, b\} \in \mathfrak{P}v_\alpha = v_{\alpha+1}$ und wegen $\alpha + 1 < \alpha + \omega$ ist der Rang von $\mathsf{R}(\{a, b\}) < \alpha + \omega$.

2. Gleich wie im ersten Fall gilt $a, b \in v_\alpha$. Also folgt $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathfrak{P}\mathfrak{P}v_\alpha = v_{\alpha+2}$. Daher gilt wie oben $\mathsf{R}(\langle a, b\rangle) < \alpha + \omega$.

3. Wir nutzen Satz 24.1. Für jedes $x \in a \cup b$ folgt $x \in a$ oder $x \in b$, also $\mathsf{R}(x) < \alpha$. Mit dem dritten Teil des gleichen Satzes folgt nun $\mathsf{R}(a \cup b) < \alpha + 1 < \alpha + \omega$.

4. Wir argumentieren gleich wie bei 3. oben. Für jedes $x \in \bigcup a$ existiert ein $y \in a$ mit $x \in y$, also $\mathsf{R}(x) < \mathsf{R}(y) < \mathsf{R}(a)$. Wir folgern daher wiederum $\mathsf{R}(\bigcup a) < \alpha + 1 < \alpha + \omega$.

5. Aus Satz 23.1 wissen wir, dass v_α transitiv ist. Also folgt für jedes $c \in \mathfrak{P}a$ auch $c \subseteq a \subseteq v_\alpha$, also $c \in \mathfrak{P}v_\alpha = v_{\alpha+1}$. Wir folgern wiederum mit Satz 24.1 dass $\mathsf{R}(\mathfrak{P}a) < \alpha + 2 < \alpha + \omega$ gilt.

6. Wie oben wissen wir, dass v_α transitiv ist. Es gilt daher $a \subseteq v_\alpha$ und $b \subseteq v_\alpha$, also auch $a \cup b \subseteq v_\alpha$. Nun ist

$$b^a \subseteq \mathfrak{P}(a \times b) \subseteq \mathfrak{P}\mathfrak{P}\mathfrak{P}(a \cup b) \subseteq \mathfrak{P}\mathfrak{P}\mathfrak{P}v_\alpha = v_{\alpha+3}.$$

   Wir folgern mit Satz 24.1 dass $\mathsf{R}(b^a) < \alpha + 3 < \alpha + \omega$ gilt.

Übung F.4. Man beweise, dass v_ω genau aus den erblich endlichen Mengen besteht.

Lösung: Sei $a \in v_\omega$. Nach Definition von ω existiert ein $\alpha < \omega$ mit $a \in v_\alpha$. Wir benutzen Induktion, um zu zeigen, dass v_α endlich ist. Weil $\alpha < \omega$, muss α eine Nachfolgerzahl sein. Nun ist v_0 endlich und für $\alpha = \alpha' + 1$ ist $v_\alpha = \mathfrak{P}v_{\alpha'}$ wegen Aufgabe C.2 und der Induktionsvoraussetzung ebenfalls endlich. Weil v_α nach Satz 23.1 transitiv ist, gilt $a \subseteq v_\alpha$. Als Teilmenge einer endlichen Menge ist a demnach selber endlich. Nun gilt für jedes $b \in a$ wegen der Transitivität $b \in v_\alpha$, also muss auch b endlich sein. Wir folgern dass a erblich endlich ist.
Sei nun umgekehrt a eine erblich endliche Menge. Wir nutzen Induktion. Für $\emptyset$ gilt $\emptyset \in v_1 \subseteq v_\omega$. Wir nehmen nun an, dass für alle erblich endlichen Mengen $b \subseteq a$ auch $b \in v_\omega$ gilt. Dann ist $\mathsf{R}(b) < \omega$. Also folgt $\mathsf{R}(a) = \sup\{\mathsf{R}(b) + 1 \mid b \in a\} < \omega$. Also muss $a \in \omega$ gelten.

Eine Klasse C heiß **transitiv**, wenn $\forall(x \in C) \cdot x \subseteq C$. Die Klasse Ord ist transitiv. Die nächsten beiden Übungen verallgemeinern Satz 17.3 und der Rekursionssatz auf beliebige transitive Klassen.

Übung F.5. Sei T eine transitive Klasse und C eine Klasse, so dass $\emptyset \in C$ und

$$\forall (a \in T) \cdot \big[\forall (x \in a) \cdot (x \in C) \to (a \in C) \big]$$

gilt. Man beweise, dass $T \subseteq C$.

Lösung: Wir nehmen an, dass $T \backslash C \neq \emptyset$ ist. Sei $a \in T \backslash C$. Nach dem Hierarchiesatz existiert eine Ordinalzahl α mit $a \in v_\alpha$. Wir definieren die Menge

$$M := \{\beta \leq \alpha \mid \exists x \in v_\beta \cdot x \in T \setminus C\}.$$

Diese ist wegen $\alpha \in M$ nichtleer. Als Menge von Ordinalzahlen besitzt sie ein minimales Element β_0. Sei $x \in v_{\beta_0}$ mit $x \in T \setminus C$. Wegen $\emptyset \in C$ ist $x \neq \emptyset$. Sei daher $y \in x$. Wegen der Tranisitvität von T folgt $x \in a \subseteq T$, also auch $x \subseteq T$ und daher $y \in T$. Falls $y \in C$ gelten würde, so würde $x \in C$ folgen, im Widerspruch zur Wahl von x. Also muss $y \in T \setminus C$ sein. Es gibt aber wegen $y \in x$ eine Ordinalzahl $\gamma < \beta_0$ mit $y \in v_\gamma$. Dies widerspricht der Minimalität von β_0. Daher war die Annahme $T \setminus C \neq \emptyset$ falsch.

Übung F.6. Sei T eine transitive Klasse und sei $H \colon \Omega \to \Omega$ eine Funktion. Man beweise, dass es eine eindeutige Funktion $G \colon T \to \Omega$ existiert, so dass für alle $x \in T$

$$G(x) = H[G_{\restriction x}]$$

gilt.

Lösung: Wir gehen ähnlich vor wie im Beweis des Rekursionssatzes. Wir behaupten, dass für jede Menge $a \in T$ eine eindeutige Funktion $g \colon a \to \Omega$ existiert mit

$$\forall (b \in a) \cdot g(b) = H[g|_b]. \tag{$\star_a$}$$

Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Seien f und g zwei Lösungen von $(\star_a)$. Angenommen, die Lösungen sind nicht gleich. Dann ist die Menge

$$\{\gamma \in \mathsf{Ord} \mid \exists c \in a \cdot (\mathsf{R}(c) = \gamma \wedge f(c) \neq g(c))\}$$

nichtleer, besitzt also ein minimales Element γ_0 mit zugehörigem $c_0 \in a$. Dann gilt für jedes $d \in c_0$ auch $\mathsf{R}(d) < \mathsf{R}(c_0) = \gamma_0$, also wegen der Minimalität von γ_0 dann $f|_{c_0} = g|_{c_0}$, also

$$f(c_0) = H[f|_{c_0}] = H[g|_{c_0}] = g(c_0)$$

im Widerspruch zur Wahl von c_0. Also muss $f = g$ sein. Nun wollen wir die Existenz von so einer Folge f zeigen. Angenommen, die Existenz ist nicht immer gegeben. Dann ist die Menge

$$M := \{\alpha \mid \exists a \in T \cdot (\mathsf{R}(a) = \alpha \wedge (\text{ es existiert keine Lösung von } (\star_a))\}$$

nichtleer und besitzt daher ein minimales Element α_0 mit zugehörigem $a_0 \in T$. Weil für jedes $x \in a_0$ auch $\mathsf{R}(x) < \mathsf{R}(a_0) = \alpha_0$ gilt, muss wegen der Minimalität von α_0 für jedes solche x eine Lösung von $(\star_x)$ existieren. Dann ist die Funktion $g \colon a_0 \to \Omega$

gegeben durch $g(x) := H[g|_x]$ eine Lösung von $(\star_{a_0})$ im Widerspruch zur Wahl von a_0. Daher war die Menge M leer und die Existenz ist immer gegeben.
Schliesslich ist die Funktion $G\colon T \to \Omega$ definiert durch

$$G(a) := H[g|_a]$$

für die eindeutige Lösung g von $(\star_a)$ die gesuchte Funktion G.

Übung F.7. Sei C eine Klasse. Man beweise, dass es eine eindeutige Klasse D gibt, so dass

$$D = \{x \in C \mid x \subset D\}$$

gilt. Man beweise außerdem, dass D die größte in C enthaltene transitive Klasse ist.

Lösung: Wir definieren

$$D := \bigcup \{x \subseteq C \mid \forall y \in x \cdot y \subseteq x\}$$

und behaupten, dass dieses D die geforderte Bedingung erfüllt. Dazu sei $y \in D$. Dann existiert ein $x \subseteq C$, das transitiv ist und $y \in x$ erfüllt. Also gilt $y \subseteq x$. Dann gilt für jedes $z \in y$ auch $z \in x$, also $z \in D$. Wir folgern $y \subseteq D$.
Umgekehrt sei $y \in \{x \in C \mid x \subseteq D\}$. Dann gilt $y \subseteq D$. Nach Definition von D folgt daraus, dass für jedes Element $z \in y$ eine transitive Menge $x_z \subseteq C$ existiert mit $z \in x_z$. Weil die Vereinigung von transitiven Mengen wieder eine transitive Menge ist, ist die Menge $x := \bigcup_{z \in y} x_z$ eine transitive Teilmenge von C mit $y \subseteq x$. Nun ist $x' := x \cup \{y\}$ eine transitive Teilmenge von C mit $y \in x'$. Also ist $y \in D$. Wir folgern daraus, dass tatsächlich $D = \{x \in C \mid x \subset D\}$ gilt.

Übung F.8. Seien S, T transitive Klassen und $F\colon S \to T$ eine bijektive Funktion, so dass

$$\forall (x \in S) \cdot \forall (a \in S) \cdot \big[(x \in a) \leftrightarrow (F(x) \in F(a))\big].$$

Man beweise, dass $S = T$ und dass $F(x) = x$ für alle $x \in S$ gilt.

Lösung: Wir behaupten, dass für alle $a \in S$ gilt

$$F(a) = \{F(x) \mid x \in a\}.$$

Für jedes $y \in F(a)$ gilt $y \in T$ wegen der Transitivität von T, also existiert wegen der Bijektivität von F ein $x \in S$ mit $y = F(x)$. Wegen der Voraussetzung in der Aufgabenstellung folgt dann $x \in a$. Umgekehrt gilt für jedes $x \in a$ wegen der Transitivität von S und der Voraussetzung in der Aufgabenstellung $F(x) \in F(a)$. Also ist unsere Behauptung richtig. Nehmen wir nun an, dass die Menge

$$M := \{x \in S \mid F(x) \neq x\}$$

nicht-leer ist. Dann existiert ein minimales Element $x_0 \in M$. Dann gilt

$$F(x_0) = \{F(y) \mid y \in x_0\} = \{y \mid y \in x_0\} = x_0,$$

wobei wir die Minimalität von x_0 ausgenutzt haben, also dass für alle $y \in x_0$ auch $F(y) = y$ gelten muss. Dies ist nun ein Widerspruch zur Wahl von x_0. Also war die Menge M leer. Wir folgern daraus, dass für alle $x \in S$ auch $F(x) = x$ gelten muss. Dann folgt aus der Bijektivität von F, dass $S = T$ gilt.