Serie 1

Eigenwerte und Quotientenräume
Abgabe 1.3.2021

Hinweis: Punkte für den Notenbonus können Sie in den Aufgaben 4(a), 4(b), 6(a) und 7(a) bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen. Für alle Aufgaben sei V ein K-Vektorraum und $T, S \in \operatorname{End}(V)$.

1. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$. Überlegen Sie geometrisch.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \text{für } \varphi \in (0, 2\pi)$$

Lösung:

Wir haben einen Eigenwert λ zum Eigenvektor $v = (a, b)$ genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ \frac{1}{2}b \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass das die Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn a oder $b = 0$. Wir bekommen also den ersten Eigenwert $\lambda_1 = 2$ mit den Eigenvektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} : a \neq 0 \right\}$$

und den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ mit den Eigenvektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} : b \neq 0 \right\}.$$

Geometrisch entspricht das einer Streckung um den Faktor 2 in die a-Richtung und einer Stauchung in die b-Richtung.

Für die zweite Matrix rechnen wir wieder

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

und machen die Unterscheidung ob $\lambda = 0$ ist oder nicht.

Falls $\lambda \neq 0$, dann ist in der zweiten Gleichung $b = 0$ und es folgt aus der ersten Gleichung $a = 0$. Aber der Nullvektor ist kein Eigenvektor, also gibt es keinen Eigenwert $\lambda \neq 0$.

Falls $\lambda = 0$, dann haben wir aus der ersten Gleichung $b = 0$, aber keine Bedingung an a.

Somit ist der einzige Eigenwert $\lambda = 0$ mit dazugehörigen Eigenvektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} : a \neq 0 \right\}.$$

Die dritte Matrix ist eine Rotationsmatrix. Geometrisch werden alle Vektoren um den Winkel φ um denn Nullpunkt gedreht. Somit werden die Vektoren (meistens) nicht auf Vielfache von sich selber abgebildet. Die Ausnahme besteht für $\varphi = \pi$, wobei die Drehung dann genau eine Rotation um 180° ist. Somit wird jeder Vektor v auf $-v$ abgebildet. Somit sind alle Vektoren in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = -1$ für den Winkel $\varphi = \pi$. Für alle anderen Winkel $\varphi \in (0, 2\pi)$ gibt es keine Eigenwerte und keine Eigenvektoren.

Wir können auch durch explizites Rechnen auf dieses Resultat kommen:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(\varphi) - b\sin(\varphi) \\ a\sin(\varphi) + b\cos(\varphi) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Durch Quadrieren kommen wir auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} (a\cos(\varphi))^2 - 2ab\sin(\varphi)\cos(\varphi) + (b\sin(\varphi))^2 &= \lambda^2 a^2 \\ (a\sin(\varphi))^2 + 2ab\sin(\varphi)\cos(\varphi) + (b\cos(\varphi))^2 &= \lambda^2 b^2 \end{aligned}$$

die wir addieren können, und mit $\cos^2 + \sin^2 = 1$ bekommen wir

$$a^2 + b^2 = \lambda^2(a^2 + b^2),$$

jetzt können wir $(a^2 + b^2)$ kürzen, weil nicht a und b beide gleich 0 sein dürfen (def. Eigenvektor). Wir schliessen, $\lambda^2 = 1$, oder $\lambda \in \{1, -1\}$.

Falls $\lambda = 1$, dann haben wir

$$\begin{aligned} a\cos(\varphi) - b\sin(\varphi) &= a \\ a\sin(\varphi) + b\cos(\varphi) &= b \end{aligned}$$

und falls $a \neq 0$, lösen wir auf

$$\cos(\varphi) = 1 + \frac{b}{a}\sin(\varphi),$$

und setzten in der unteren Gleichung ein

$$a\sin(\varphi) + b + \frac{b^2}{a}\sin(\varphi) = b,$$

was vereinfacht zu

$$\sin(\varphi)(a^2 + b^2) = 0.$$

Da $(a^2 + b^2) \neq 0$ (def. Eigenvektor), muss $\sin(\varphi) = 0$ und in der ersten Gleichung eingesetzt bekommen wir $\cos(\varphi) = 1$, was nur für die Winkel $\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$ gilt. Analog können wir überlegen was passiert falls $a = 0$, aber dafür $b \neq 0$. Auch der Fall $\lambda = -1$ ist analog zu der Rechnung hier.

Definition. *Ein Endomorphismus $T \in \mathrm{End}(V)$ eines Vektorraums V heisst* nilpotent*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $T^n = 0$.*

2. Zeigen Sie: Jeder nilpotente Endomorphismus hat 0 als Eigenwert und 0 ist der einzige Eigenwert.

Lösung:

Falls der nilpotente Endomorphismus $T = 0$ ist, dann ist $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert. Deshalb dürfen wir im Folgenden annehmen, dass $T \neq 0$.

Sei T ein nilpotenter Endomorphismus mit $T^n = 0$ und $T^{n-1} \neq 0$. Sei $v \in V$, so dass $w := T^{n-1}v \neq 0$. Wir haben nun $Tw = 0$ und somit ist w ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 0$. Wir wissen somit, dass 0 ein Eigenwert jedes nilpotenten Endomorphismus ist.

Sei T ein nilpotenter Endomorphismus mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor v. Wir haben $T(v) = \lambda v$. Da T linear ist, können wir berechnen $T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda^2 v$. Wir sehen

$T^n(v) = \lambda^n v$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da T nilpotent ist, gibt es ein n, so dass $T^n = 0$ ist, also $0 = T^n(v) = \lambda^n v$. Da ein Eigenvektor nicht null sein darf, ist $\lambda^n = 0$, also auch $\lambda = 0$.

3. Zeigen Sie: Falls $T^2 + T$ den Eigenwert -1 hat, dann hat T^3 den Eigenwert 1.

Lösung:

Sei $v \in V \setminus \{0\}$ mit $(T^2 + T)(v) = -v$. Aus der Bedingung folgt $T^2(v) = -T(v) - v$. Wir berechnen nun

$$T^3(v) = T(T^2(v)) = T(-T(v) - v) = -T^2(v) - T(v) = -(-T(v) - v) - T(v) = v.$$

Da $v \neq 0$ zeigt dies, dass v ein Eigenwert von T^3 mit Eigenwert 1 ist.

4. Beweisen Sie:

(a) Wenn $v \in V$ ein Eigenvektor von $T \circ S$ mit Eigenwert $\lambda \in K$ ist, und $S(v) \neq 0$ gilt, dann ist $S(v)$ ein Eigenvektor von $S \circ T$ mit Eigenwert λ. (2)

(b) Falls V endlichdimensional ist, dann haben $T \circ S$ und $S \circ T$ dieselben Eigenwerte. (2)

(c) Finden Sie ein Beispiel eines Vektorraums in dem $T \circ S$ und $S \circ T$ unterschiedliche Eigenwerte haben. *Tipp: Verschiebung*

Lösung:

(a) Sei also $T \circ S(v) = \lambda v$. Wir haben $S \circ T(S(v)) = S(T \circ S(v)) = S(\lambda v) = \lambda S(v)$, da S linear. Da $S(v) \neq 0$, ist $S(v)$ somit ein Eigenvektor von $S \circ T$ zum Eigenwert λ.

(b) Sei v ein Eigenvektor von $T \circ S$ zum Eigenwert λ. Wir unterscheiden zwei Fälle für $S(v)$.

Fall 1: $S(v) \neq 0$: Es folgt aus Teil (a), dass jeder Eigenwert λ von $T \circ S$ auch ein Eigenwert von $S \circ T$ ist.

Fall 2: $S(v) = 0$:. Es gilt $\lambda v = T \circ S(v) = T(0) = 0$ und somit $\lambda = 0$.

Falls T injektiv ist, dann gibt es ein $w \in V \setminus \{0\}$, so dass $T(w) = v$ und dann ist w ein Eigenvektor von $S \circ T$ zum Eigenwert $\lambda = 0$, da $S \circ T(w) = S(v) = 0$. Falls hingegen T nicht injektiv ist, gibt es ein Element $w \neq 0$ im Kern von T, das heisst $T(w) = 0$. Dann haben wir ebenfalls $S \circ T(w) = S(0) = 0$. In beiden Fällen existiert somit ein Eigenvektor $w \neq 0$ mit $S \circ T(w) = 0$ und $\lambda = 0$ ist ein Eigenwert von $S \circ T$.

Wir haben gezeigt, dass jeder Eigenwert von $S \circ T$ auch ein Eigenwert von $T \circ S$ ist. Die andere Richtung folgt, indem man die Variablen T und S vertauscht.

(c) Wir betrachten den K-Vektorraum der Folgen $K^\infty := \{(a_1, a_2, \ldots,) : a_i \in K \text{ für } i \in \mathbb{N}\}$ und zwei lineare Abbildungen

$$T, S \colon K^\infty \to K^\infty$$

mit $T(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots)$und $S(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, a_4, \ldots)$. Somit verschiebt T alle Einträge nach rechts und S verschiebt alle Einträge nach links.

Wir bemerken, dass $S \circ T = \mathrm{Id}_{K^\infty}$ und somit nur den Eigenwert $\lambda = 1$ hat. Hingegen haben wir $T \circ S \colon (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto (0, a_2, a_3, \ldots)$. Wir bemerken, dass $T \circ S$ den Eigenwert 0 hat, zum Beispiel mit dem Eigenvektor $(1, 0, 0, \ldots) \in K^\infty$.

Wir bemerken, dass T zwar injektiv ist, aber im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall nicht automatisch surjektiv.

Die folgenden drei Aufgaben verwenden nur Material aus der Linearen Algebra I und werden in der Vorlesung verwendet werden. Zusätzlich sei V von nun an endlichdimensional.

Definition. *Zwei Endomorphismen $S, T \in \mathrm{End}(V)$ heissen* simultan diagonalisierbar*, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $[T]_\mathcal{B}$ und $[S]_\mathcal{B}$ beide diagonal sind.*

5. Zeigen Sie: Falls T, S simultan diagonalisierbar sind, dann gilt $T \circ S = S \circ T$.

Bemerkung. *Die andere Implikation wird in der Vorlesung gezeigt werden.*

Lösung:

Sei $\mathcal{B}$ also eine Basis, so dass

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_n \end{pmatrix}, \quad [S]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \end{pmatrix},$$

Wir erinnern uns, dass die Hintereinanderschaltung $(\circ)$ von linearen Abbildungen, der Matrixmultiplikation $(\cdot)$ entspricht und rechnen direkt

$$[T \circ S]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B} \cdot [S]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} t_1 s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_n s_n \end{pmatrix} = [S]_\mathcal{B} \cdot [T]_\mathcal{B} = [S \circ T]_\mathcal{B}$$

und wenn zwei Darstellungsmatrizen gleich sind, dann sind sie auch gleich als abstrakte lineare Abbildungen.

Definition. *Ein Untervektorraum $U \subseteq V$ heisst T*-invariant*, wenn $T(U) \subseteq U$.*

6. Sei U ein T-invarianter Untervektorraum von V.
   (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung (2)

$$\begin{aligned} T_{V/U} \colon V/U &\to V/U \\ v + U &\mapsto Tv + U \end{aligned}$$

   ein wohl-definierter Endomorphismus von V/U ist.

   (b) Wir nehmen an, dass $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V ist, so dass $U = \mathrm{Sp}(v_1, \ldots, v_r)$ für ein $0 < r < n$. Zeigen Sie:
   (1) $\mathcal{B}_{V/U} := (v_{r+1} + U, \ldots, v_n + U)$ ist eine Basis von V/U.
   (2) Es existieren $A \in M_{r \times r}(K)$ und $B \in M_{(n-r)\times(n-r)}(K)$, so dass

$$\begin{aligned} [T]_\mathcal{B} &= \left(\begin{array}{c|c} A & (*) \\ \hline 0 & B \end{array}\right), \\ [T_{V/U}]_{\mathcal{B}_{V/U}} &= B, \\ [T|_U]_{\mathcal{B}_U} &= A, \end{aligned}$$

   wobei $\mathcal{B}_U = (v_1, \ldots, v_r)$ ist.

Lösung:

(a) Wir zeigen zuerst, dass $T_{V/U}$ wohldefiniert ist. Eine Funktion ist wohldefiniert, wenn sie für jeden "Input" einen (eindeutigen) "Output" gibt. Da V/U aus Äquivalenzklassen besteht, könnte etwas schief gehen, wenn man zwei verschiedene Representanten wählt. Wir sehen aber, dass falls $v+U = v'+U \in V/U$, dann ist $v - v' \in U$ und somit

$$T(v) + U = T(v' + v - v') + U = T(v') + T(v - v') + U = T(v') + U \in V/U,$$

wobei wir verwendet haben, dass U T-invariant ist. Deshalb ist $T_{V/U}$ wohldefiniert und somit eine Funktion.

Als nächstes müssen wir zeigen, dass $T_{V/U}$ eine lineare Abbildung ist. Sei also $v+U, w+U \in V/U$ und $\lambda \in K$. Wir haben

$$\begin{aligned} T_{V/U}(v+U \ + \ w+U) &= T_{V/U}(v+w+U) \overset{\text{def}}{=} T(v+w)+U \\ &= T(v)+T(w)+U = T(v)+U \ + \ T(w)+U \overset{\text{def}}{=} T_{V/U}(v+U)+T_{V/U}(w+U). \\ T_{V/U}(\lambda\cdot(v+U)) &= T_{V/U}(\lambda v+\lambda U) = T_{V/U}(\lambda v+U) \\ &\overset{\text{def}}{=} T(\lambda v)+U = \lambda T(v)+U = \lambda\cdot(v+U) \overset{\text{def}}{=} \lambda T_{V/U}(v+U). \end{aligned}$$

Und zuletzt, eine lineare Abbildung heisst Endomorphismus, wenn ihr Definitionsbereich gerade gleich dem Zielbereich ist. In diesem Fall sind beide Bereiche V/U.

(b) (1) Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, sind die Vektoren linear unabhängig. Eine Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist ebenfalls linear unabhängig, somit ist $\{v_{r+1}, \dots, v_n\} \subseteq V$ linear unabhängig. Wir zeigen, dass $\{v_{r+1}+U, \dots, v_n+U\} \subseteq V/U$ linear unabhängig ist:
Sei also $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n \in K$, so dass

$$0_{V/U} = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i(v_i+U) = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i v_i + U.$$

Daraus folgt, dass $\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i v_i \in U = \mathrm{Sp}(v_1, \dots, v_r)$. Da $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, muss somit $\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ sein. Daraus folgern wir, dass $\lambda_i = 0$, was wir wollten.
Damit $\{v_{r+1}+U, \dots, v_n+U\} \subseteq V/U$ eine Basis von V/U ist, muss es zusätzlich noch ein Erzeugenden-System sein. Sei also $v+U \in V/U$ beliebig. Wir können $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ schreiben, da $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist. Nun behaupten wir, dass

$$v+U = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i(v_i+U),$$

in der Tat bemerken wir, dass $v_j + U = U$ für $j \in \{1, \dots, r\}$ und somit

$$\begin{aligned} v+U = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) + U &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i v_i + U) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(v_i+U\right) \\ &= \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i\left(v_i+U\right) + \sum_{i=1}^{r} U = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i\left(v_i+U\right). \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass V/U von $\{v_{r+1}+U, \dots, v_n+U\}$ erzeugt wird. Somit haben wir gezeigt, dass es sich um eine Basis von V/U handelt.

(2) Wir erinnern uns, dass die Matrix $[T]_{\mathcal{B}}$ in einer Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ durch die Eigenschaft

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \left([T]_{\mathcal{B}}\right)_{ij} v_j \tag{1}$$

eindeutig definiert ist.
Die Matrix $[T]_\mathcal{B}$ kann als Blockmatrix

$$[T]_\mathcal{B} = \left(\begin{array}{c|c} A & X \\ \hline Y & B \end{array}\right)$$

geschrieben werden.
Die Bedingung $Y = 0$ folgt daraus, dass U ein T-invarianter Unterraum von V ist: Sei $i \in \{1, \ldots, r\}$, dann gilt

$$T(v_i) \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{r} A_{ij} v_j + \sum_{j=r+1}^{n} Y_{ij} v_j$$

aber da $T(v_i) \in U = \mathrm{Sp}(v_1, \ldots, v_r)$, muss $Y_{ij} = 0$ sein und es folgt auch direkt, dass $[T|_U]_{\mathcal{B}_U} = A$.
Für die Matrix B bemerken wir

$$\begin{aligned}\sum_{j=r+1}^{n} \left([T_{V/U}]_{\mathcal{B}_{V/U}}\right)_{ij} (v_j + U) &\overset{(1)}{=} T_{V/U}(v_i + U) = T(v_i) + U \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{r} X_{ij} v_j + \sum_{j=r+1}^{n} B_{ij} v_j + U \\ &= \sum_{j=r+1}^{n} B_{ij} v_j + U = \sum_{j=r+1}^{n} B_{ij}(v_j + U)\end{aligned}$$

da $v_i \in U$ für $i \in \{1, \ldots, r\}$. Somit gilt $[T_{V/U}]_{\mathcal{B}_{V/U}} = B$.

7. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V und $\pi_U : V \to V/U$ die kanonische Abbildung

$$v \in V \mapsto v + U \in V/U.$$

Für einen Untervektorraum $W \subseteq V$ sei

$$\pi_U(W) = \{\pi_U(w) \mid w \in W\}.$$

Für einen Untervektorraum $L \subseteq V/U$ sei

$$\pi_U^{-1}(L) = \{v \in V \mid \pi_U(v) \in L\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktionen π_U und π_U^{-1} induzieren eine Bijektion (2)

$$\{W \subseteq V \colon W \text{ ist UVR von } V \text{ mit } U \subseteq W\} \xrightarrow{\tilde{\pi}_U} \{L \subseteq V/U \colon L \text{ ist UVR von } V/U\}.$$

(b) Falls U T-invariant ist, dann induziert die Bijektion in (a) die Bijektion

$$\{W \subseteq V \colon W \text{ ist } T\text{−inv. UVR von } V \text{ mit } U \subseteq W\} \xrightarrow{\tilde{\pi}_U} \{L \subseteq V/U \colon L \text{ ist } T_{V/U}\text{−inv. UVR von } V/U\}.$$

(c) Falls $\dim U = r < \infty$ und L ein Untervektorraum von V/U ist mit $\dim L = s$, dann ist

$$\dim \pi_U^{-1}(L) = r + s.$$

Lösung:

(a) Wir geben Namen:

$$A = \{W \subseteq V : W \text{ ist UVR von } V \text{ mit } U \subseteq W\}$$
$$B = \{L \subseteq V/U : L \text{ ist UVR von } V/U\}$$

Wir zeigen zuerst, dass $\tilde{\pi}_U : A \to B$ wohldefiniert ist.

Sei $W \in A$. Dann ist $L := \tilde{\pi}_U(W) := W/U$ eine Teilmenge von V/U. Ausserdem ist L ein Vektorraum, und somit ist L ein Untervektorraum von V/U.

Wir haben gezeigt, dass $\tilde{\pi}_U : A \to B$ wohldefinert ist. Wir müssen noch zeigen, dass es eine Bijektion ist.

Surjektiv: Wir verwenden den Fact, dass $\pi_U : V \to V/U$ surjektiv ist (wegen Definition von V/U). Sei $L \in B$. Wir können $W := \pi^{-1}(L) \subseteq V$ definieren. Wir überprüfen, dass W ein Vektorraum ist:

- $0_V \in W$, da $\pi_U(0_V) = 0_{V/U} \in L$.

- Für $v \in W$, $\lambda \in K$ haben wir $\pi_U(\lambda v) = \lambda v + U = \lambda(v + U) = \lambda \pi_U(v) \in \lambda L = L$, also $\lambda v \in W$.

- Für $v, w \in W$ haben wir $\pi_U(v + w) = v + w + U = v + U + w + U = \pi_U(v) + \pi_U(w) \in L + L = L$, also gilt $v + w \in W$.

Somit ist W ein Untervektorraum von V. Wir bemerken, dass $U \subset W$, da $\pi_U(U) = \{0_{V/U}\} \subseteq L$.

Wir behaupten, dass $\tilde{\pi}_U(W) = L$ gilt. Die Inklusion $\subseteq$ folgt aus der Definition von W, und die andere Inklusion $\supseteq$ folgt aus der Surjektivität von $\pi_U : V \to V/U$. Somit ist $\tilde{\pi_U}$ surjektiv.

Injektiv: Sei $W, W' \in A$ mit $\tilde{\pi}(W) = \tilde{pi}(W')$. Sei $w \in W$. Wir haben $\pi_U(w) \in \tilde{\pi}_U(W) = \tilde{\pi}_U(W')$. Also existiert ein $w' \in W'$, so dass $\pi_U(w) = \pi_U(w')$. Wir haben $w + U = w' + U$, also $w - w' + U = U$ und somit $w - w' \in U$. Da $W' \in A$ gilt $U \subseteq W'$ und deshalb $w - w' \in W'$. Wir haben also $w = w - w' + w' \in W' + W' = W'$. Das selbe Argument funktioniert auch in die andere Richtung und wir haben gezeigt, dass $W = W'$.

(b) Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned} T_{V/U}(\tilde{\pi}_U(W)) &= \left\{T_{V/U}(w + U) : w \in W\right\} && (2)\\ &= \{T(w) + U : w \in W\} && (3)\\ &= \tilde{\pi}_U(T(W)). && (4) \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass wenn $W \in A$ T-invariant ist, dass dann $\tilde{\pi}_U(W)$ $T_{V/U}$-invariant ist:

$$T_{V/U}(\tilde{\pi}(W)) \overset{(4)}{=} \tilde{\pi}_U(T(W)) = \tilde{\pi}_U(W)$$

Falls umgekehrt $\tilde{\pi}_U(W)$ $T_{V/U}$-invariant ist, dann zeigt

$$T(W) = \tilde{\pi}_U^{-1} \circ \tilde{\pi}_U(T(W)) \overset{(4)}{=} \tilde{\pi}_U^{-1} \circ T_{V/U}(\tilde{\pi}_U(W)) = \tilde{\pi}_U^{-1} \circ \tilde{\pi}_U(W) = W$$

dass auch W T-invariant ist. Wir haben gezeigt, dass die Bijektion Invariantz beibehält.

(c) Wir erinnern uns, dass bei einer linearen Abbildung $T : V \to V'$, die Dimensionsformel gilt:

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(V).$$

Wir definieren $W := \tilde{\pi}_U(L)$. In unserem Fall ist $T = \pi_U|_W, V = W$ und $V' = W/U = L$. Wir haben $\ker(\pi_U) = U$, $\operatorname{im}(\pi_U) = W/U$ und bekommen

$$\dim(U) + \dim(L) = \dim(W).$$