Serie 10

Sylvester und positiv-Definitheit
Abgabe 10. 5. 2021

Hinweis: In dieser Serie ist V ein Vektorraum über einem Körper K. Wenn von positiv Definitheit die Sprache ist, dann ist immer $K = \mathbb{R}$ gemeint. Sie können Punkte in den Aufgaben 3(a), 6(b) und 8(c) bekommen.

1. Betrachte die quadratische Form q auf $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) := 4x_1^2 - 12x_1x_2 + 12x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_4 - 4x_3x_4 + 3x_4^2 .$$

Ist q positiv definit? Ist q ausgeartet? Was ist die Signatur von q?

Lösung:

Die zu q gehörige symmetrische Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 1 \\ -6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

und wir können das symmetrische Gaussverfahren darauf anwenden:

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 1 \\ -6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3Z_1+2Z_2\to Z_2} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3S_1+2S_2\to S_2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-Z_1+4Z_4\to Z_4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 12 & -8 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{-S_1+4S_4\to S_4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 12 & -8 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-Z_2+Z_4\to Z_4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 32 \end{pmatrix} \xrightarrow{-S_2+S_4\to S_4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4Z_3+Z_4\to Z_4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4S_3+S_4\to S_4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass q positiv semidefinit ist (aber nicht positiv definit). Da die Matrix eine 0 drin hat ist q ausgeartet. Die Signatur von q ist

$$(r_+(q), r_-(q), r_0(q)) = (3, 0, 1).$$

Stattdessen könnte man die Aufgabe auch mit quadratischer Ergänzung lösen. Wir finden:

$$\begin{aligned} q(x) &= 4(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_4)^2 + 3x_2^2 + \frac{11}{4}x_4^2 + 3x_2x_4 + 2x_3^2 - 4x_3x_4 \\ &= (2x_1 - 3x_2 + \frac{1}{2}x_4)^2 + 2(x_3 - x_4)^2 + 3x_2^2 + 3x_2x_4 + \frac{3}{4}x_4^2 \\ &= (2x_1 - 3x_2 + \frac{1}{2}x_4)^2 + 2(x_3 - x_4)^2 + 3(x_2 + \frac{x_4}{2})^2 \end{aligned}$$

und sehen gleich, dass $q(x) \geq 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^4$. Es gilt $q(x) = 0$ genau dann, wenn x in dem Unterraum

$$\begin{aligned} V \; &:= \; \left\{ (x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - 3x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0,\; x_3 - x_4 = 0,\; x_2 + \frac{x_4}{2} = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \; = \; \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

liegt. Die quadratische Form ist also positiv semidefinit (also nicht definit), ausgeartet, und besitzt die Signatur

$$(r_+(q), r_-(q), r_0(q)) = (3, 0, 1).$$

2. Betrachten Sie die symmetrischen reellen Matrizen

$$(a) \;\; A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (b) \;\; B := \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (c) \;\; C := \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie, ob A und B positiv definit sind. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist C positiv definit?

Hinweis: Verwende das Hauptminorenkriterium.

Lösung:

(a) Da $\det A_2 = \det \left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) = -6$ negativ ist, ist A nicht positiv definit.

(b) Die Hauptminoren von B haben die Determinanten $5, 16$ und 16, sind somit alle positiv, woraus folgt, dass B positiv definit ist.

(c) Wir bekommen zwei Bedingungen für die positiv-Definitheit:

$$\begin{aligned} 1 - a^2 &> 0 \\ 1 + 2a^3 - 3a^2 &> 0 \end{aligned}$$

Durch Ausprobieren bemerken wir dass $a = 1$ gerade $p(a) = 1 + 2a^3 - 3a^2 = 0$ erfüllt. Mit Polynomdivision bekommen wir, $p(a) = (a-1)(2a^2 - a - 1)$ und mit der Mitternachtsformel

$$p(a) = \frac{1}{2}(a-1)^2 \left(a + \frac{1}{2} \right)$$

Durch Einsetzen von $p(0) = \frac{1}{4} > 0$ und Beachten der anderen Bedingung bekommen wir, dass C genau dann positv definit ist, wenn a im offenen Interval

$$\left] -\frac{1}{2}, 1 \right[\subseteq \mathbb{R}$$

liegt.

3. Sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Eine Bilinearform $B \in \operatorname{Bil}(V)$ heisst *antisymmetrisch (oder schiefsymmetrisch)*, falls $\forall v, w \in V \colon B(v, w) = -B(w, v)$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass jede Bilinearform auf V eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Bilinearform dargestellt werden kann. (2)

(b) Sei B eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass B genau dann antisymmetrisch ist, wenn für jede Basis $\mathcal{B}$ von V gilt
$$M_{\mathcal{B}}(B)^T = -M_{\mathcal{B}}(B).$$

(c) Folgern Sie, dass für eine antisymmetrische Bilinnearform B und eine beliebigen Basis $\mathcal{B}$ alle Diagonaleinträge von $M_{\mathcal{B}}(B)$ Null sind.

(d) Ein *symplektischer Vektorraum* ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum zusammen mit einer antisymmetrischen Bilinearform ω, die nicht ausgeartet ist. Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale symplektische Vektorraum eine Basis $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}$ besitzt, so dass für alle i, j gilt $(\star)$
$$\begin{aligned} \omega(v_i, v_j) &= 0 \\ \omega(w_i, w_j) &= 0 \\ \omega(v_i, w_j) &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Insbesondere hat jeder symplektische Vektorraum gerade Dimension.

Lösung:

(a) Wir schreiben die Bilinearform B als $B = \frac{1}{2}(B+B^T)+\frac{1}{2}(B-B^T)$ und bemerken, dass $(B+B^T)^T = B + B^T$ symmetrisch ist und $(B - B^T)^T = B^T - B = -(B - B^T)$ antisymmetrisch.

Wir müssen noch zeigen, dass die Zerlegung eindeutig ist.

Angenommen es gibt Bilinearformen $B = S_1 + A_1 = S_2 + A_2$ mit S_i symmetrisch und A_i antisymmetrisch. Dann sehen wir, dass
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(B + B^T) &= \frac{1}{2}(S_1 + A_1 + S_1^T + A_1^T) = \frac{1}{2}(S_1 + S_1 + A_1 - A_1) = S_1 \\ \frac{1}{2}(B + B^T) &= \frac{1}{2}(S_2 + A_2 + S_2^T + A_2^T) = \frac{1}{2}(S_2 + S_2 + A_2 - A_2) = S_2, \end{aligned}$$

also $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}(B + B^T)$. Analog folgt man, dass $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}(B - B^T)$.

(b) Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis. Falls B antisymmetrisch ist, dann haben wir
$$M_{\mathcal{B}}(B)_{ij} = B(v_i, v_j) = -B(v_j, v_i) = -M_{\mathcal{B}}(B)_{ji} = -(M_{\mathcal{B}}(B)^T)_{ij}.$$

Umgekehrt gilt für $v = \sum \lambda_i v_i$ und $w = \sum \mu_i v_i$, dass
$$\begin{aligned} B(v, w) &= B\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j B(v_i, v_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j M_{\mathcal{B}}(B)_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j (-M_{\mathcal{B}}(B)_{ji}) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j B(v_j, v_i) = -B\left(\sum_{j=1}^n \mu_j v_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = -B(w, v). \end{aligned}$$

(c) Die Diagonaleinträge sind $i = j$. Aus (c) wissen wir, dass
$$M_{\mathcal{B}}(B)_{ii} = -M_{\mathcal{B}}(B)_{ii},$$

also $M_{\mathcal{B}}(B)_{ii} = 0$.

(d) Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion. Wir zeigen zuerst die Induktionsbasis in zwei Fällen:

Ein 0-dimensionaler Vektorraum hat die leere Menge als Basis und diese erfüllt alle Eigenschaften, die wir möchten.

Eine antisymmetrische Bilinearform auf einem 1-dimensionaler Vektorraum erfüllt $B(v, v) = 0$, also auch $B(v, \lambda v) = \lambda B(v, v) = 0$ für alle $\lambda v \in V$ und ist somit ausgeartet. Wir folgern, dass es gar keine eindimensionalen symplektischen Vektorräume gibt.

Wir können folgende Aussage als Induktionsannahme annehmen.

Falls die Dimension eines symplektischen Vektorraums kleiner als n ist, dann ist n gerade und es gibt eine Basis mit den gewünschten Eigenschaften.

Sei also V ein n-dimensionaler symplektischer Vektorraum. Man beginnt mit einem beliebigen Vektor $v \in V$. Wegen der Antisymmetrie hat man $\omega(v, v) = -\omega(v, v) = 0$. Die Lineare Abbildung $Q_v : V \to \mathbb{R}, Q_v(w) = \omega(v, w)$ ist nicht konstant null, da ω nicht ausgeartet ist. Sei also $w' \in V$ so dass $\omega(v, w') \neq 0$. Durch Skalierung kommt man auf $w \in V$ mit $\omega(v, w) = 1$.

Nun betrachten wir $V' = \ker(Q_v) \cap \ker(Q_w)$ und möchten die Dimension davon berechnen. Wir bemerken, dass $Q_v : V \to \mathbb{R}$ surjektiv ist, also gilt $\dim(\mathrm{Ker}(Q_v)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(Q_v)) = n - 1$. Da $Q_v(w) = 1$ gilt $w \notin \mathrm{Ker}(Q_v)$, also ist $\mathrm{Ker}(Q_v) + \mathrm{Ker}(Q_w) = V$. Wir haben die Dimensionsformel

$$\begin{aligned}\dim(V) &= \dim(\mathrm{Ker}(Q_v)) + \dim(\mathrm{Ker}(Q_w)) - \dim(\mathrm{Ker}(Q_v) \cap \mathrm{Ker}(Q_w))\\ n &= n - 1 + n - 1 - \dim(V'),\end{aligned}$$

also $\dim(V') = n - 2$. Wir überprüfen, ob $\omega|_{V' \times V'}$ ausgeartet ist: Falls es ein $a \in V'$ gibt, so dass für alle $b \in V'$ gilt $\omega(a, b) = 0$, dann gilt für $b' = b + \lambda_1 v + \lambda_2 w \in V$: $\omega(a, b') = \omega(a, b) + \lambda_1\omega(a, v) + \lambda_2\omega(a, w) = 0 - Q_v(a) - Q_w(a) = 0$, da $a \in \mathrm{Ker}(Q_v) \cap \mathrm{Ker}(Q_w) = V'$. Also falls $\omega|_{V' \times V'}$ ausgeartet, dann war auch schon ω ausgeartet, was aber nicht stimmt. Wir folgern, dass $\omega|_{V' \times V'}$ nicht ausgeartet ist. Wir haben gezeigt, dass V' ein symplektischer Vektorraum ist.

Wegen der Induktionsannahme wissen wir, dass V' gerade Dimension hat und dass es eine Basis $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_{\frac{n-2}{2}}, w_1, \ldots, w_{\frac{n-2}{2}}\}$ mit

$$\begin{aligned}\omega(v_i, v_j) &= 0\\ \omega(w_i, w_j) &= 0\\ \omega(v_i, w_j) &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

für $i, j \leq \frac{n-2}{2}$. Wir setzen $v_{\frac{n}{2}} = v$ und $w_{\frac{n}{2}} = w$. Für i oder j gleich $\frac{n}{2}$ folgen die Aussagen aus $V' = \mathrm{Ker}(Q_v) \cap \mathrm{Ker}(Q_w)$. Wir haben die Aussage bewiesen.

4. Zeigen Sie, dass es $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Kongruenzklassen von reellen symmetrischen $n \times n$-Matrizen gibt.

Lösung:

Wir erinnern, dass der Satz von Sylvester besagt, dass die Kongruenzklasse vollständig durch die Signatur bestimmt ist. Wir müssen also herausfinden, wieviele Signaturen für eine $n \times n$-Matrix möglich sind.

Wir beweisen die Formel mit vollständiger Induktion: Für $n = 1$ gibt es genau 3 Kongruenzklassen von Matrizen, nämlich die mit Signatur $+1, -1$ und 0. Die Formel

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

stimmt für $n = 1$.

Wir nehmen nun an, dass es

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Kongruenzklassen von $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen gibt. Wir möchten wissen wieviele Kongruenzklassen von $n \times n$-Matrizen es gibt. Wir unterscheiden:

Fall 1: Die Matrix hat einen positiven Eigenwert, das heisst die Signatur hat $r_+ \geq 1$. Die anderen Werte können $+1, -1$ oder 0 sein, also gibt es per Induktionsvermutung genau

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

solche Matrizen.

Fall 2: Die Matrix hat $r_+ = 0$. Wenn wir r_0 wählen, ist $r_- = n - r_0$ vollständig bestimmt. r_0 kann $0, 1, \ldots$ oder n sein, also gibt es $n+1$ Möglichkeiten.

Insgesamt haben wir also

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Möglichkeiten, was zu zeigen war. Möglichkeiten

5. Sei q eine quadratische Form über $V = \mathbb{R}^2$. Stellen Sie ein Kriterium an die Signatur von q auf, anhand welchem man entscheiden kann, ob $V_q = \{v \in \mathbb{R}^2 \colon q(v) = 1\}$ eine Hyperbel oder Ellipse ist. Welche anderen Formen kann V_q annehmen?

   Hinweis: Sie können die folgende Definition verwenden: Eine Menge V ist eine *Hyperbel*, falls es eine Basis $\{v_1, v_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ gibt, so dass $V = \{v = xv_1 + yv_2 \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 1\}$ gilt. Eine Menge V ist eine *Ellipse*, falls es eine Basis $\{v_1, v_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ gibt, so dass $V = \{v = xv_1 + yv_2 \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ gilt.

Lösung:

Wir schreiben A für die symmetrische Matrix mit $q_A = q$ (bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2\}$ von $\mathbb{R}^2$). Wenn die quadratische Form q positiv definit ist, dann gibt es ein $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $A = P^T I_2 P$. Für die Basis

$$\{v_1, v_2\} = \{P^{-1}e_1, P^{-1}e_2\}$$

gilt für $v = xv_1 + yv_2$, dass

$$Pv = xPv_1 + yPv_2 = xe_1 + ye_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wir können die Menge V_q wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} V_q &= \{v \in \mathbb{R}^2 \colon v^T A v = 1\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \colon v^T P^T I_2 P v = 1\} \\ &= \left\{ v = xv_1 + yv_2 \colon \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \right\} \\ &= \left\{ v = xv_1 + yv_2 \colon x^2 + y^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

Jede positiv definite Form q hat somit eine Ellipse als V_q. Andererseits sehen wir auch, dass jede Ellipse von einer quadratischen Form mit Signatur $r_+(q) = 2, r_-(q) = 0, r_0(q) = 0$ stammt.

Wenn die Signatur $r_+(q) = 1, r_-(q) = 1, r_0(q) = 0$ ist, dann bekommen wir in der gleichen Definition der Basis eine Hyperbel.

Wenn die Signatur negativ definit $r_-(q) = 2$ ist, dann gibt es gar keine $v \in \mathbb{R}^2$ mit $q(v) = 1$, also ist $V_q = \emptyset$. Dies ist ebenso der Fall wenn $r_0(q) = 2$ oder $(r_(q) = 1, r_0(q) = 1)$ gilt.

Der letzte Fall ist positiv semidefinitheit $r_+(q) = 1, r_0(q) = 1$. In diesem Fall korrespondiert $x^2 = 1$ zu zwei Parallelen $x = 1$ und $x = -1$.

Es ist nicht möglich eine Parabel zu erhalten.

6. Wir betrachten die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$
und vollziehen die Schritte von Satz 8.5.11.
   (a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A positiv sind.
   (b) Finden Sie eine symmetrische invertierbare Matrix S mit $S^T S = S^2 = A$. (2)
   (c) Finden Sie eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R mit $R^T R = A$.

Lösung:

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom
$$p_A(x) = \det(A - xI_3) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$$
durch Einsetzen und Polynomdivision merkt man schnell, dass
$$p_A(x) = -(x-1)^2(x-4).$$
Also sind die Eigenwerte 1 und 4.

(b) Der Spektralsatz besagt, dass symmetrische Matrizen orthogonal diagonalisierbar sind. Wir bemerken, dass wir folgende Basis der Eigenräume haben:
$$E_1(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle \qquad E_4(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle.$$
Wir wenden Gram-Schmidt auf den zweiten Vektor an, um eine Orthogonalbasis zu bekommen (der dritte Eigenraum ist automatisch orthogonal zu den anderen, da er Eigenraum zu einem anderen Eigenwert ist). Nachdem wir skaliert haben, können wir die Basis als Spalten einer orthogonalen Matrix
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$
zusammenfassen. Es gilt $Q^T A Q = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ und in der Notation des Beweises gilt $O = Q^T$.
Wir definieren nun die Wurzel der Diagonalmatrix als
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Dann definieren wir
$$S = QEQ^T = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix},$$
welche symmetrisch ist wegen dem Spektralsatz. Ausserdem gilt $S^T S = QE^T Q^T QEQ^T = QE^T EQ^T = QDQ^T = A$.

(c) Wir wenden die QR-Zerlegung auf S an, das heisst wir interpretieren die Spaltenvektoren von S als Basis und wenden darauf Gram-Schmidt an. Wir bezeichnen
$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und bemerken, $\langle v_i, v_j\rangle = 1$ für $i \neq j$ und $\langle v_i, v_i\rangle = 2$. Wir bekommen

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle w_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = \ldots = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ w_3 &= v_3 - \frac{\langle w_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle w_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 = \ldots = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und normalisiert bekommen wir

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{9} & -\frac{\sqrt{3}}{9} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{7\sqrt{6}}{18} & -\frac{\sqrt{3}}{9} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{18} & \frac{5\sqrt{3}}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 & \tilde{w}_2 & \tilde{w}_3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \langle v_1, \tilde{w}_1\rangle & \langle v_2, \tilde{w}_1\rangle & \langle v_3, \tilde{w}_1\rangle \\ 0 & \langle v_2, \tilde{w}_2\rangle & \langle v_3, \tilde{w}_2\rangle \\ 0 & 0 & \langle v_3, \tilde{w}_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

erfüllt nun $S = QR$ und in der Tat $R^T R = (Q^T S)^T (Q^T S) = S^T S = A$.

7. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und

$$p_A(x) = (-1)^n (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Matrix A ist genau dann negativ definit, wenn die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ alle positiv sind.
Hinweis: Betrachten Sie $q(x) := \prod (x - \lambda_i)$.

(b) Die Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ alternierende Vorzeichen haben, mit $a_{n-1} < 0$.
Hinweis: Betrachten Sie $(-1)^n q(-x)$ und benützen Sie (a).

Lösung:

Wir bemerken zuerst, dass A symmetrisch ist, nach dem Spektralsatz wissen wir, dass A orthogonal diagonalisierbar ist, insbesondere sind alle Eigenwerte λ_i reell. Wir können also schreiben

$$q(x) := \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (-1)^n p_A(x)$$

und ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n) \\ a_1 &= (-1)^{n-1} (\lambda_2 \cdots \lambda_n + \ldots + \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}) \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= -(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \end{aligned}$$

(a) Wenn alle Eigenerte negativ sind, dann folgt, dass

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n(\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n) > 0 \\ a_1 &= (-1)^{n-1}(\lambda_2 \cdots \lambda_n + \ldots + \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}) > 0 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= -(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) > 0. \end{aligned}$$

Wir müssen noch zeigen, dass wenn die a_i alle positiv sind, dann die λ_i negativ sind. Angenommen alle $a_i > 0$, aber es gibt ein Eigenwert $\lambda \geq 0$, dann gilt

$$q(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 \geq a_0 > 0,$$

also ist $p_A(\lambda) = \pm q(\lambda) \neq 0$ und λ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Widerspruch.

(b) Wenn A positiv definit ist, das heisst alle Eigenwerte sind positiv, dann sehen wir aus

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n(\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n) \\ a_1 &= (-1)^{n-1}(\lambda_2 \cdots \lambda_n + \ldots + \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}) \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= -(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n), \end{aligned}$$

dass die Vorzeichen von a_i alternieren. Es gilt $a_{n-1} < 0$.

Wenn hingegen die Vorzeichen von a_i alternieren (mit $a_{n-1} < 0$), dann definieren wir

$$q'(x) := (-1)^n q(-x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}a_1 x + (-1)^n a_0.$$

und sehen, dass die Koeffizienten von q' alle positiv sind. Wir haben auch

$$q'(x) = (-1)^n \prod(-x - \lambda_i) = \prod(x + \lambda_i).$$

Aus (a) wissen wir, dass für

$$q'(x) := \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i') = x^n + a_{n-1}'x^n + \ldots + a_1'x + a_0'.$$

alle λ_i' negativ sind (da die $a_i' > 0$). Das entspricht gerade $\lambda_i = -\lambda_i' > 0$. Also sind alle Eigenwerte positiv und die Matrix positiv definit.

8. Seien A und C zwei reelle symmetrische $n \times n$-Matrizen mit A positiv definit.

(a) Zeigen Sie, dass eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ existiert, so dass S^TAS und S^TCS beide Diagonalmatrizen sind.

Hinweis: Finden Sie $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $P^TAP = I_n$. Wenden Sie dann den Spektralsatz auf P^TCP an.

(b) Gilt die Aussage in (a) auch, wenn A nicht positiv definit ist? Untersuche zum Beispiel die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Zeige, dass ein $k_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $C + kA$ positiv definit ist für alle $k > k_0$. (2)

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 8(a).

Lösung:

(a) Da A positiv definit ist, ist A kongruent zu I_n, das heisst es gibt $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $P^TAP = I_n$. Wir bemerken nun, dass P^TCP ebenfalls symmetrisch ist, da $(P^TCP)^T = P^TC^TP = P^TCP$ gilt. Symmetrische Matrizen können laut dem Spektralsatz orthogonal diagonalisiert werden. Sei also Q orthogonal mit $Q^T(P^TCP)Q$ diagonal. Wir definieren $S = PQ$ und bemerken, dass $S^TAS = Q^TP^TAPQ = Q^TI_nQ = Q^TQ = I_n$, da Q orthogonal ist. Somit sind sowohl S^TAS, als auch S^TCS diagonal.

(b) Für jede 2×2-Matrix $S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ berechnen wir

$$\begin{aligned} S^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} S &= \begin{pmatrix} a^2-c^2 & ab-cd \\ ab-cd & b^2-d^2 \end{pmatrix} \\ S^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S &= \begin{pmatrix} 2ac & ad+bc \\ ad+bc & 2bd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Matrizen sind diagonal genau dann, wenn $ab = cd$ und $ad = -bc$ ist. Ausserdem ist S invertierbar genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ ist. Zusammen verlangt dies, dass $2ad = -2bc = ad - bc \neq 0$ ist. Insbesondere sind a, b, c, d alle ungleich Null. Durch Teilen von $ad = -bc$ durch $ab = cd$ folgt

$$\frac{d}{b} = \frac{ad}{ab} = \frac{-bc}{cd} = -\frac{b}{d},$$

also $(\frac{d}{b})^2 = -1$, was in $\mathbb{R}$ gar nicht möglich ist. Somit kann die gesuchte Matrix S nicht existieren.

(c) Sei S wie in Aufgabe (a) und sei $D = S^TCS$ diagonal. Wir definieren

$$k_0 := -\min\{d_i \colon d_i \text{ ist ein Diagonaleintrag von } D\}$$

und sehen, dass alle Matrizen $D + kI_n$ für $k > k_0$ positiv definit sind. Wir haben die Kongruenz $D + kI_n = S^TCS + kS^TAS = S^T(C + kA)S$ und somit ist auch $C + kA$ positiv definit, da die positiv Definitheit durch Kongruenz erhalten bleibt.

9. Wir übersetzen die Aussagen von Aufgabe 8 in die Sprache der Bilinearformen. Das Lemma aus Serie 9, Aufgabe 4(a) könnte hilfreich seni.

(a) Seien B und D zwei symmetrische Bilinearformen, mit B positiv definit. Zeigen Sie, dass eine Basis $\mathcal{C}$ existiert, so dass $M_{\mathcal{C}}(B)$ und $M_{\mathcal{C}}(D)$ diagonal sind.

(b) Seien B und D zwei symmetrische Bilinearformen, mit B positiv definit. Zeigen Sie, dass ein $k_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $D + kB$ für alle $k > k_0$ eine positv-definite symmetrische Bilinearform ist.

Lösung:

(a) Wir wählen eine Basis $\mathcal{B}$ und betrachten die symmetrischen Darstellungsmatrizen $A = M_{\mathcal{B}}(B)$ und $C = M_{\mathcal{B}}(D)$. A ist positiv definit. Wir können Aufgabe 8(a) anwenden und bekommen $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass $S^TAS = I_n$ und S^TCS diagonal. Sei jetzt $\mathcal{C}$ wie im Lemma S9A4(a). Dann haben wir

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{C}}(B) &= [Id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} M_{\mathcal{B}}(B) [Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = ([Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{B}}(B) [Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = S^TAS \\ M_{\mathcal{C}}(D) &= [Id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} M_{\mathcal{B}}(D) [Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = ([Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{B}}(D) [Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = S^TCS, \end{aligned}$$

welche beide diagonal sind.

(b) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Wir haben wieder die symmetrischen Darstellungsmatrizen $A = M_{\mathcal{B}}(B)$ und $C = M_{\mathcal{B}}(D)$, wobei A positiv definit ist. Aus Aufgabe 8 (c) folgt, dass es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $k > k_0$ gilt $C + kA$ ist positiv definit. Die Abbildung $\mathrm{Bil}(V) \to M_{n\times n}(\mathbb{R}), B \mapsto M_{\mathcal{B}}(B)$ ist linear und deshalb ist die Darstellungsmatrix

$$M_{\mathbb{B}}(D + kB) = M_{\mathbb{B}}(D) + kM_{\mathbb{B}}(B) = C + kA$$

von $D + kB$ positiv definit, also auch $D + kB$ positiv definit für $k > k_0$.