Serie 11

Jordan-Normalform
Abgabe 17. 5. 2021

Hinweis: In dieser Serie geht es um die Jordan-Normalform (Satz 9.1.9 im Skript). In Aufgabe 1 zeigen Sie einen Spezialfall davon. In allen restlichen Aussagen dürfen und sollen Sie den Satz verwenden. Sie können Punkte in 2(e), 3(b) und 7 bekommen.

1. Sei $N \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent mit Index k, das heisst $N^{k-1} \neq 0$, aber $N^k = 0$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen ohne Verwendung der Jordan-Normalform.
   (a) Für alle $v \in V$ gilt für die Lebensdauer $\ell(v) \leq k-1$ und es gibt ein $v \in V$ mit $\ell(v) = k-1$.
   (b) Falls $\dim(V) = k$, dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $[N]_{\mathcal{B}} = J_{0,k}$.

   Lösung:
   (a) Die Lebensdauer $\ell(v)$ ist die eindeutige Zahl mit $N^{\ell(v)}v \neq 0$ und $N^{\ell(v)+1} = 0$. Es gilt $N^k v = 0v = 0$, also muss $\ell(v) < k$ für alle v gelten. Da $N^{k-1} \neq 0$ gibt es ein $v \in V$, so dass $N^{k-1}v \neq 0$. Dieser Vektor v hat $\ell(v) = k-1$.
   (b) Sei v_1 ein Vektor mit Lebensdauer $\ell(v_1) = k-1$. Dann ist $\mathcal{B} = \{N^{k-1}v_1, \ldots, N^2v_1, Nv_1, v_1\}$ eine Basis von V (es handelt sich um $k = \dim(V)$ linear unabhängige Vektoren). In dieser Basis gilt
   $$[N]_{\mathcal{B}} = J_{0,k}.$$

2. Sei $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von T.
   (a) Zeigen Sie, dass die geometrische Vielfachheit von λ gleich der Anzahl Jordanblöcke zum Eigenwert λ ist.
   (b) Wie lässt sich die algebraische Vielfachheit in der Jordan-Normalform interpretieren?
   (c) Schliessen Sie aus (a) und (b), dass T genau dann diagonalisierbar ist, wenn die algebrische und geometrische Vielfachheit aller Eigenwerte gleich sind.
   (d) Sei k die Potenz, die im Minimalpolynom $M_T(x) = \ldots(x-\lambda)^k\ldots$ für λ vorkommt. Welche Interpretation hat k in der Jordan-Normalform?
   (e) Angenommen wir wissen für jeden Eigenwert von T die geometrische Vielfachheit, die algebraische Vielfachheit und den Exponenten k im Minimalpolynom. Können wir aus diesen Daten die Jordan-Normalform vollständig herleiten? (2)

   Lösung:
   (a) Die geometrische Vielfachheit ist die Dimension des Kerns von $T - \lambda I_n$. Es gibt eine Jordan-Normalform für T und man sieht, dass in jedem Jordan-Block $\dim \mathrm{Ker}(J_{\lambda,n} - \lambda I_n) = \dim \mathrm{Ker}(J_{0,n}) = 1$ gilt. Für jeden Jordanblock zum Eigenwert λ bekommt man also eine geometrische Vielfachheit. Für andere Eigenwerte bekommt man keine Elemente im Kern. Die geometrische Vielfachheit ist eine Eigenschaft der linearen Abbildun T, die unabhängig von der Basis ist, also ist die geometrische Vielfachheit von T gerade die Anzahl der Jordan-Blöcke in einer Jordan-Normal-Form.
   (b) Die algebraische Vielfachheit ist die Potenz k von $\ldots(x-\lambda)^k\ldots$ im charakteristischen Polynom. Das charakteristische Polynom einer Abbildung in Jordan-Normalform lässt sich direkt berechnen (nur die Diagonaleneinträge sind relevant) und wir bemerken, dass k gerade die Anzahl der Einträge λ in der Jordan-Normalform ist.

(c) Wenn die algebraische und geometrische Vielfachheit gleich sind, dann kommt ein Eigenwert gleich oft vor wie es Jordan-Blöcke gibt. Das heisst alle Jordanblöcke haben Grösse 1 und somit ist T diagonalisierbar.

(d) Das Minimalpolynom ist minimal bezüglich dem Cayley-Hamilton Satz, also $M(T) = 0$. Wenn T in Jordan-Normalform ist, sehen wir schnell, dass für $p(x) = (x - \lambda I_n)^k$ gerade $k \geq n$ gelten muss, damit $p(J_{\lambda,n}) = 0$. Das Minimalpolynom hat also gerade $k = n$ als Potenz des Faktors $(x - \lambda I_n)$ im Minimalpolynom. Somit ist k die grösse des grössten Jordanblocks $J_{\lambda,k}$ in der Jordan-Normalform von T.

(e) Die Antwort ist Nein. Die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda,2}} & & \\ & \boxed{J_{\lambda,2}} & \\ & & \boxed{J_{\lambda,3}} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda,1}} & & \\ & \boxed{J_{\lambda,3}} & \\ & & \boxed{J_{\lambda,3}} \end{pmatrix}$$

haben geometrische Vielfachheit 3 und algebraische Vielfachheit 7 für λ. Das Minimalpolynom ist $M(x) = (x - \lambda)^3$. Die Matrizen sind aber dennoch nicht ähnlich zueinander, da sich die Jordan-Blöcke unterscheiden.

3. Wir möchten die Jordan-Normalform von linearen Abbildungen für Matrizen übersetzen.

(a) Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und nehmen Sie an, dass $p_A(x)$ in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, dass A ähnlich ist zu einer Matrix in Jordan Normalform.

(b) Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und nehme an, dass $p_A(x)$ in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, dass eine diagonalisierbare Matrix $E \in M_{n\times n}(K)$ und eine nilpotente Matrix $N \in M_{n\times n}(K)$ existieren, sodass $EN = NE$ und $A = E + N$. (2)

Lösung:

(a) Wir definieren $T = m_A\colon K^n \to K^n$. Es gilt $p_A = p_T$ und somit kann der Satz der Jordan-Normalform auf T angewendet werden. Es gibt also eine Basis $\mathcal{B}$, so dass $[T]_\mathcal{B}$ aus Jordan-Blöcken besteht. Wenn wir die Basis als Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ schreiben, dann gilt

$$[T]_\mathcal{B} = [\mathrm{Id}_V]^\mathcal{E}_\mathcal{B}[T]_\mathcal{E}[\mathrm{Id}_V]^\mathcal{B}_\mathcal{E} = P^{-1}[T]_\mathcal{E}P = P^{-1}AP.$$

Somit ist A ähnlich zur Matrix $[T]_\mathcal{B}$ in Jordan-Normalform.

(b) Laut (a) ist A ähnlich zu einer Matrix J in Jordan-Normalform, die als $J = D+N$ geschrieben wird, wobei D die Diagonaleinträge von J hat und N den Rest. Somit gilt $A = P^{-1}JP = P^{-1}DP + P^{-1}NP =: E + M$, wobei E konjugiert zu einer Diagonalenmatrix ist und M nilpotent, da N nilpotent ist: Wenn $N^k = 0$, dann $M^k = P^{-1}NPP^{-1}NP \dots P^{-1}NP = P^{-1}N^kP = P^{-1}0P = 0$. Durch explizite Rechnung sieht man auch, dass

$$\begin{aligned} DN &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1\varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda_{n-1}\varepsilon_{n-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2\varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda_n\varepsilon_{n-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = ND \end{aligned}$$

für $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, da für alle i mit $\varepsilon_i = 1$ gilt $\lambda_i = \lambda_{i+1}$. Somit $EM = P^{-1}DPP^{-1}NP = P^{-1}DNP = P^{-1}NDP = P^{-1}NPP^{-1}DP = ME$.

4. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass A und A^T zueinander ähnlich sind.

Lösung:

Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt jedes Polynom in $\mathbb{C}[x]$ in Linearfaktoren. Insbesondere ist jede Matrix ähnlich zu einer Matrix in Jordan Normalform. Sei $A = Q^{-1}JQ$ mit $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und J in Jordan Normalform. Man beachte: A und A^T sind genau dann ähnlich, wenn J und J^T ähnlich sind, da Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist. Es reicht also, zu zeigen dass J und J^T für J in Jordan Normalform ähnlich sind. Da J und J^T Blockdiagonalmatrizen mit Jordanblöcken bzw. deren Transponierten auf der Diagonalen sind, reicht es zu zeigen, dass:

Für alle $\lambda \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ sind $J_{\lambda,n}$ und $J_{\lambda,n}^T$ ähnlich.

Für $n = 1$ ist die Aussage wahr. Sei also $n > 1$. Sei $\tilde{\mathcal{E}}_n$ die "umgekehrte" Standardbasis auf K^n, d.h. $\tilde{\mathcal{E}}_n = (e_n, \ldots, e_1)$, wobei $\mathcal{E}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis ist. Dann ist die Basiswechselmatrix $Q = [\mathrm{Id}_{K^n}]_{\mathcal{E}_n}^{\tilde{\mathcal{E}}_n}$ gegeben durch

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (e_n \mid \cdots \mid e_1).$$

Man berechnet

$$J_{\lambda,n}Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \lambda \\ \vdots & \iddots & \lambda & 0 \\ 1 & \iddots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = QJ_{\lambda,n}^T$$

und folglich ist $J_{\lambda,n} = Q^{-1}J_{\lambda,n}Q$ wie behauptet.

5. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{F}_2$.

Lösung:

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom $p_A(x) = (2-x)^3+2-3(2-x) = -x^3+6x^2-9x+4$, das die Nullstelle 1 hat. Mit Polynomdivision und quadratischer Ergänzung kommen wir auf $p_A(x) = -(x-1)(x^2-5x+4) = -(x-1)^2(x-4)$. Das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren, also gibt es eine Jordan-Normalform.

Über $\mathbb{R}$ sind die Eigenwerte also 1 und 4. Um herauszufinden, ob es einen oder zwei Jordanblöcke für $\lambda = 1$ gibt könnte man die geometrische Vielfachheit $\dim \mathrm{Ker}(A - I_3)$ berechnen. Da A eine symmetrische Matrix ist, können wir aber sogar direkt den Spektralsatz anwenden und wissen, dass A diagonalisierbar ist. Die Jordan-Normalform über $\mathbb{R}$ ist also

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Über $\mathbb{F}_2$ haben wir $4 = 0$, also ist das charakteristische Polynom $p_A(x) = -(x-1)^2x$. Wir können den Spektralsatz nicht anwenden und berechnen stattdessen die Dimension von

$$\operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\right),$$

welche $= 2$ ist. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 ist also 2 und somit gleich der algebraischen Vielfachheit. Die Matrix ist diagonalisierbar. Also muss die Jordan-Normalform wie

$$J = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

über $\mathbb{F}_2$ aussehen.

(b) Wir bemerken, dass die Matrix Bereits in Blockform ist. Wir betrachten zuerst den Block

$$B_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

und bemerken, dass das charakteristische Polynom $p_{B_1}(x) = (x-1)x$ ist. Da die zwei Eigenwerte 1 und 0 unterschiedlich sind, gibt es zwei Jordan-Blöcke der Grösse 1, das heisst eine Jordan-Normalform von B_1 ist

$$B_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

über $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{F}_2$.

Für

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

haben wir das charakteristische Polynom $p_{B_2}(x) = -x^3$ und wir wissen noch nicht wieviele Jordanblöcke zum Eigenwert 0 es hat. Wir können aber das charakteristiche Polynom berechnen indem wir die Potenzen von B_2 berechnen:

$$B_2^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad B_2^3 = 0$$

Über $K = \mathbb{F}_2$ ist $B_2^2 = 0$, da $6 = 0$. In diesem Fall ist das Minimalpolynom also $M_{B_2}(x) = x^2$ und wir haben einen Jordan-Block der Grösse 2, die Jordan-Matrix muss dann von der Form

$$J = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

sein. Über $K = \mathbb{R}$ hingegen ist das Minimalpolynom $M_{B_2}(x) = x^3$ und wir bekommen die Jordan-Normalform:

$$J = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Alles in allem haben wir für $K = \mathbb{F}_2$ eine Jordan-Normalform

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

für die Matrix B. Für $K = \mathbb{R}$ ist eine Jordan-Normalform hingegen durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

6. Sei $\lambda \in K$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie einmal direkt und einmal unter Verwendung der Jordan-Normalform, dass K^n unzerlegbar bezüglich $m_{J_{\lambda,n}} : K^n \to K^n$ ist.

Lösung:

Wir zeigen die Aussage zuerst direkt. Ein Vektorraum V ist unzerlegbar, falls für alle Unterräume $U_1, U_2 \subseteq V$ mit $U_1 \oplus U_2 = V$ gilt $U_1 = \{0\}$ oder $U_1 = V$.

Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda = 0$. Sei $A = m_{J_{0,n}} : K^n \to K^n$ und $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis von K^n. Wir zeigen zuerst, dass jeder A-invariante Untervektorraum $U \subset K^n$ mit $U \neq \{0\}$ den Vektor e_1 enthält:

Sei also U ein A-invarianter Untervektorraum mit $v \in U \setminus \{0\}$. Wir können $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ schreiben. Sei i_0 der grösste Index mit $\alpha_{i_0} \neq 0$. Dann ist $A^{(n-1)-i_0} v = A^{(n-1)-i_0} \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = \alpha_{i_0} e_1$. Da U A-invariant ist, muss somit $e_1 \in U$ sein.

Wenn U_1 und U_2 zwei A-invariante Unterräume mit $U_1 \neq \{0\} \neq U_2$ sind, dann gilt $\{e_1\} \subseteq U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ und somit nicht $U_1 \oplus U_2 = V$.

Wenn $\lambda \neq 0$, dann ist $J_{\lambda,n} = \lambda I_n + J_{0,n}$. Jeder Unterraum ist $m_{\lambda I_n}$ invariant. Wir behaupten, dass ein Unterraum U genau dann $m_{J_{\lambda,n}}$-invariant ist, wenn er $m_{J_{0,n}}$-invariant ist.

Sei also U ein $m_{J_{\lambda,n}}$-invarianter Unterraum. dann gilt

$$m_{J_{0,n}} U = (m_{J_{\lambda,n}} - m_{I_n}) U = m_{J_{\lambda,n}} U - m_{I_n} U \subseteq U - U = U.$$

Wenn hingegen U ein $m_{J_{0,n}}$-invarianter Unterraum ist, dann

$$m_{J_{\lambda,n}} U = m_{\lambda I_n} U + m_{J_{0,n}} U \subseteq U + U = U.$$

Aus den Betrachtungen für $\lambda = 0$ folgt, dass K^n unzerlegbar ist für $m_{J_{\lambda,n}}$.

Wir können auch die Jordan-Normalform direkt verwenden: Wenn K^n zerlegbar ist, dann gibt es eine Basis mit Jordan-Normalform von $A = m_{J_{\lambda,n}}$ mit mindestens zwei Jordan-Blöcken. Aber in der Standardbasis ist A eine Matrix mit einem einzigen Jordan-Block. Die Anzahl Jordanblöcke ist eindeutig, also kann A nicht zerlegbar sein.

7. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine Matrix endlicher Ordnung, d.h. $A^m = I_n$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist. (2)

Lösung:

Da A in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ liegt, und da über $\mathbb{C}$ jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt, besitzt A über $\mathbb{C}$ eine Jordan Normalform $A = Q^{-1} J Q$ mit J in Jordan Normalform und $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$.

Sei m wie in der Aufgabenstellung, dann gilt

$$I_n = A^m = (Q^{-1} J Q)^m = Q^{-1} J^m Q$$

und folglich ist $J^m = I_n$. Es reicht also zu zeigen, dass jeder Jordanblock endlicher Ordnung Dimension 1×1 besitzt.

Angenommen es gibt einen Jordanblock $J_{\lambda,k}$ mit $k \geq 2$. Dann können wir die ersten paar Einträge von $J_{\lambda,k}^m$ berechnen. Es gilt

$$J_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad J_{\lambda,k}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & & \\ 0 & \lambda^2 & & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$J_{\lambda,k}^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & & \\ 0 & \lambda^3 & & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad, \qquad J_{\lambda,k}^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} & & \\ 0 & \lambda^m & & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^m \end{pmatrix}$$

Wir bemerken, dass es kein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $J_{\lambda,k}^m = I_k$ (betrachte $\lambda = 0$ und $\lambda \neq 0$ separat). Dies ist ein Widerspruch zur Annahme dass es einen Jordanblock der Grösse $k \geq 2$ gibt.

Wir folgern, dass alle Jordan-Blöcke Grösse 1 haben, also ist A diagonalisierbar.

8. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ mit $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass A nilpotent ist.

   Hinweis: Verwenden Sie die Jordansche Normalform von A und die Determinante der Vandermonde-Matrix $V(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ aus LAI, Serie 13, Aufgabe 8(a).

Lösung:

Sei J eine Jordan-Normalform von A (existiert, weil wir über $\mathbb{C}$ arbeiten), das heisst es gibt $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass $A = P^{-1}JP$. Für die Spur gilt $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}JP) = \mathrm{Tr}(P^{-1})\,\mathrm{Tr}(J) = \mathrm{Tr}(P) = \mathrm{Tr}(J)$.

Die Diagonaleneinträge von J sind die Eigenwerte λ_i. Unser Ziel ist zu zeigen, dass für alle i gilt $\lambda_i = 0$. Seien also $\lambda_1, \dots, \lambda_m \neq 0$ die von Null verschiedene (und paarweise unterschiedlichen) Eigenwerte von J und $r_i \geq 1$ deren algebraische Vielfachheit. Aus $\mathrm{Tr}(J) = 0, \mathrm{Tr}(J^2) = 0, \dots, \mathrm{Tr}(J^m) = 0$ folgt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} r_1\lambda_1 + \ldots + r_m\lambda_m &= 0, \\ r_1\lambda_1^2 + \ldots + r_m\lambda_m^2 &= 0, \\ &\vdots \\ r_1\lambda_1^m + \ldots + r_m\lambda_m^n &= 0, \end{aligned}$$

das auch als

$$C\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^m & \lambda_2^m & \cdots & \lambda_m^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} = 0$$

geschrieben werden kann. Wir werden zeigen, dass C vollen Rang hat, also die einzige Lösung für das Gleichungssystem $(r_1, r_2, \dots, r_m) = (0, 0, \dots, 0)$ ist. Mit der Vandermonde-Matrix

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}$$

können wir die Determinante

$$\begin{aligned}\det C &= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1}\end{pmatrix} \\ &= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m \cdot \det V(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)^T \\ &= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m \cdot \prod_{1\le i<j\le m}(\lambda_j-\lambda_i) \neq 0\end{aligned}$$

berechnen. Da $\det C \neq 0$, hat C vollen Rang. Also ist $\mathrm{Ker}(C) = 0$ und $r_i = 0$ für alle i. Da aber für algebraische Vielfache $r_i \geq 1$ gilt, muss $m = 0$ sein. Das zeigt, dass gar keine Eigenwerte $\lambda_i \neq 0$ vorkommen können. Der einzite Eigenwert, der vorkommen kann ist $\lambda = 0$. Somit besteht J aus Jordanblöcken $J_{0,k}$ und ist nilpotent. Somit ist auch $A = P^{-1}JP$ nilpotent.