Serie 12

Jordan-Normalform und Matrix-Exponential
Abgabe 24. 5. 2021

Hinweis: In dieser Serie geht es um die Jordan-Normalform, sowie eine ihrer Anwendungen, der Exponentialfunktion. In den Aufgaben 1, 4(a) und 7(a) können Sie Punkte bekommen.

1. Berechnen Sie die Jordan-Normalform und eine dazugehörige Basis von (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Das charakteristische Polynom von A ist $p_A(x) = (1-x)^5$ und alle Eigenwete sind 1. Wir definieren $N = A - I_5$ und betrachten die Kette

$$\{0\} \subseteq \mathrm{Ker}(N) \subseteq \mathrm{Ker}(N^2) \subseteq \mathrm{Ker}(N^3) \subseteq \mathrm{Ker}(N^4) \subseteq \mathrm{Ker}(N^5)$$

$$\{0\} \subseteq \mathrm{Span}\left(e_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathrm{Span}\left(e_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_5\right) \subseteq \mathrm{Span}\left(e_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_5, e_3\right) \subseteq \mathbb{C}^5 \subseteq \mathbb{C}^5$$

für

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^4 = 0.$$

Wir haben also den Exponent $r = 4$ des Minimalpolynoms. Wir wissen hiermit schon, dass die Jordan-Normalform von A aus einem vierer-Block und einem Einer-Block bestehen muss. Wir möchten aber auch noch eine Basis dazu finden.

Wir beginnen mit einem Vektor in $\mathrm{Ker}(N^4) \setminus \mathrm{Ker}(N^3)$, also e_4. Wir bekommen eine Basis für den grössten Jordanblock durch

$$\mathcal{B}_1 = \{N^3 e_4, N^2 e_4, N e_4, e_4\} = \left\{ e_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 \right\}.$$

Der einzige Vektor, den wir noch nicht verwendet haben liegt in $\mathrm{Ker}(N^1) \setminus \{0\}$ und ist $\mathcal{B}_2 = \{(0,1,0,0,-1)^T\}$. Als Basiswechselmatrix haben wir

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Jordan-Normalform J von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ a-3 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie für $a = 1$ und $a = -1$ jeweils eine Jordan-Basis von $\mathbb{R}^3$ für A.

Lösung:

Wir berechnen das charakteristische Polynom $p_A(x) = -x^3 + x^2(a+6) - x(4a+11) + 6 + 3a$ und bemerken durch ausprobieren, dass $p_A(1) = 0$. Mit Polynomdivision kommen wir auf $p_A(x) = -(x-1)(x^2 - (5+a)x + 3a + 6)$. Mit der Mitternachtsformel bekommen wir $p_A(x) = -(x-1)(x-\lambda_+)(x-\lambda_-)$, mit

$$\lambda_+ = \frac{5+a}{2} + \frac{|1-a|}{2}, \quad \lambda_- = \frac{5+a}{2} - \frac{|1-a|}{2},$$

Wir führen Fallunterscheidungen durch, um die Jordan-Normalform zu bestimmen.

Fall 1, $a > 1$: Es gilt $|1-a| = a-1$ und somit $\lambda_+ = 2+a, \quad \lambda_- = 3$. Da $a > 1$ ist $\lambda_+ = 2 + a > 3$, also sind alle drei Eigenwerte unterschiedlich. Wir bekommen die Jordan-Normalform:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_+ & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Case 2, $a = 1$: Wir haben $|1-a| = 0$, also $\lambda_+ = \lambda_- = \frac{5+a}{2} = 3$. Wir müssen herausfinden, ob es einen oder zwei Jordan-Blöcke zum Eigenwert 3 gibt. Wir betrachten dazu die geometrische Vielfachheit

$$\dim \operatorname{Ker}(A - 3I_3) = \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \dim \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 2.$$

somit ist die algebraische und geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 3 gleich, und A ist diagonalisierbar:

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Fall 3, $a < 1$: also $|1-a| = 1-a$ und $\lambda_+ = 3, \lambda_- = 2+a$. Da $\lambda_- = 2 + a < 3$ sind $\lambda_+ \neq \lambda_-$. Es kann jetzt aber passieren, dass $\lambda_- = 1$:

Fall 3a $a = -1$: Dann ist $\lambda_- = 1$ und wir haben zwei mal den Eigenwert 1. Wir betrachten wieder die geometrische Vielfachheit

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_3) = \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \dim \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = 1.$$

Somit ist die geometrische Vielfachheit nicht gleich der algebraischen Vielfachheit und wir bekommen einen Jordan-Block der Grösse 1:

$$J_{3a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Fall 3b, $1 > a \neq -1$: Die drei Eigenwerte sind alle unterschiedlich, also gilt

$$J_{3b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+a & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Für $a = 1$ und $a = -1$ berechnen wir jetzt noch eine Jordan-Basis von $\mathbb{R}^3$ für A.

Sei $a = 1$. Wir wissen, dass A diagonalisierbar ist. Wir müssen also Eigenvektoren finden und als Spaltenmatrix schreiben:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir bekommen $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Sei jetzt $a = -1$. Wir haben zwei mal den Eigenwert 1 und ein Mal den Eigenwert 3. Für den Eigenwert 1 bekommen wir

$$N = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Kette

$$\begin{aligned} \{0\} &\subseteq \operatorname{Ker}(N) \subseteq \operatorname{Ker}(N^2) \\ \{0\} &\subseteq \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

, woraus wir einen Vektor $v = e_3 \in \operatorname{Ker}(N^2) \setminus \operatorname{Ker}(N)$ wählen können. Wir bekommen die Teilbasis

$$\mathcal{B}_1 = \{Nv, v\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, e_3 \right\}.$$

und zusammen mit der Teilbasis $\mathcal{B}_2 = \{(-1,1,1)^T\}$ bekommen wir die Basiswechselmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und es gilt $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Seien $q, p \in \mathbb{C}[x]$ Polynome, so dass die Leitkoeffizienten von p und q, $(-1)^{\deg(p)}$ und 1 sind, so dass p und q die gleichen Nullstellen haben und so dass q ein Teiler von p ist. Finden Sie einen Endomorphismus $T \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^{\deg(p)})$, so dass p das charakteristische Polynom und q das Minimalpolynom von T ist.

Lösung:

Das Polynom p ist über $\mathbb{C}$ definiert und zerfällt deshalb in Linearfaktoren

$$p(x) = (-1)^{\deg(p)} \prod_{i=1}^{\deg(p)} (x - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{\deg(p)} (\lambda_i - x) = \prod_{j \in J} (\lambda_j - x)^{n_j},$$

wobei n_j die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_j ist ($J = \{1, 2, \dots, j_{\max}\}$ mit $j_{\max} \leq \deg(p)$ ist eine Indexmenge für die paarweise unterschiedlichen Eigenwerte λ_j). Da q ein Teiler von p ist, gibt es $0 \leq m_j \leq n_j$, so dass:

$$q(x) = \prod_{j \in J} (\lambda_j - x)^{m_j}.$$

Für jedes $j \in J$ definieren die $n_j \times n_j$-Matrizen

$$A_j = \begin{pmatrix} J_{\lambda_j, m_j} & 0 & \cdots & \\ 0 & \lambda_j & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix},$$

die zuerst einen Jordan-Block der Grösse m_j haben und dann $n_j - m_j$ viele Jordan-Blöcke der Grösse 1. Die Block-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{j_{\max}} \end{pmatrix}$$

erfüllt nun gerade, dass $p_A = p$ und $M_A = q$. Der lineare Operator $T = m_A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{\deg(p)})$ hat dasselbe charakteristische Polynom und Minimalpolynom und erfüllt somit die Aufgabe.

4. Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\exp(A)$ invertierbar ist, indem Sie eine explizite Inverse finden. (2)
   (b) Zeigen Sie, dass $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.
   (c) Folgern Sie aus (b), dass $\exp(A)$ invertierbar ist.

Lösung:

(a) Wir betrachten $B = -A$. Da A und B kommutieren gilt $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B) = \exp(A - A) = \exp(0) = I_n$. Somit ist $\exp(B)$ die Inverse von $\exp(A)$ und $\exp(A)$ ist invertierbar.

(b) Da A über $\mathbb{C}$ definiert ist, hat A eine Jordan-Normalform J. Wir schreiben $J = D + N$, wobei

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten λ_i ist und N die nilpotente Matrix mit Nullen und Einsen in der oberen Nebendiagonalen. Die Exponentialmatrix ist

$$\exp(J) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k}{k!}$$

und wir bemerken, dass $J^0 = I_n, J, J^2, \dots$ alles obere Dreiecksmatrizen sind, also ist auch $\exp(J)$ eine obere Dreiecksmatrix. Für die Berechnung der Determinante von $\exp(J)$ sind also nur die Diagonalen-Einträge relevant. Wir bemerken, dass im Ausdruck

$$J^k = (D + N)^k = D^k + D^{k-1}N + D^{k-2}ND + \dots + N^k$$

nur der Term D^k Beträge zu den Diagonalen-Einträgen macht. Sobald irgendwo im Term mit einem N multipliziert wird, sind die Diagonaleneinträge alle 0. Es gibt also eine strikt obere Dreiecksmatrix

N', so dass

$$\exp(J) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} + N' = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} + N' = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} + N' = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

und wir berechnen die Determinante

$$\det(\exp(J)) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}.$$

Andererseits haben wir $\mathrm{Tr}(J) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ und somit

$$\exp(\mathrm{Tr}(J)) = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_1} = \det(\exp(J)).$$

Für $A = P^{-1}JP$ gilt $A^k = (P^{-1}JP)^k = P^{-1}J^kP$ und somit

$$\exp(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P^{-1}J^kP}{k!} = P^{-1}\exp(J)P$$

Ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante und Spur, also gilt

$$\det(\exp(A)) = \det(P^{-1}\exp(J)P) = \det(\exp(J)) = \exp(\mathrm{Tr}(J)) = \exp(\mathrm{Tr}(P^{-1}JP)) = \exp(\mathrm{Tr}(A)).$$

(c) Für eine beliebige Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ gilt $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)} > 1$. Somit ist $\det(\exp(A)) \neq 0$ und $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ invertierbar.

5. Zeigen Sie, dass für[1]

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(2) &:= \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \colon X = -X^T\} \\ \mathrm{SO}(2) &:= \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \colon AA^T = I_2 \text{ und } \det(A) = 1\}, \end{aligned}$$

gilt: $\exp(\mathfrak{so}(2)) = \mathrm{SO}(2)$.

Lösung:
Eine Matrix

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist genau dann in $\mathfrak{so}(2)$, wenn $a = -a, d = -d$ und $b = -c$, also

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir berechnen

$$X^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}, \quad X^3 = \begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] Diese Definitionen kommen aus der Theorie der Lie-Gruppen: $\mathfrak{so}(2)$ ist die Lie-Algebra von der Lie-Gruppe SO(2).

und bemerken, dass $X^{k+4} = b^4 X^k$ gilt. Wir berechnen die Exponentialmatrix

$$\begin{aligned}\exp(X) &= I_2 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \dots & b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \dots \\ -b + \frac{b^3}{3!} - \frac{b^5}{5!} + \frac{b^7}{7!} - \dots & 1 - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} =: A.\end{aligned}$$

Wir haben also

$$\exp(\mathfrak{so}(2)) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aus

$$AA^T = \begin{pmatrix} \cos^2(b) + \sin^2(b) & -\sin(b)\cos(b) + \cos(b)\sin(b) \\ \sin(b)\cos(b) - \cos(b)\sin(b) & \cos^2(b) + \sin^2(b) \end{pmatrix} = I_2$$

und $\det(A) = \cos^2(b) + \sin^2(b) = 1$ folgt, dass $\exp(\mathfrak{so}(2)) \subseteq \mathrm{SO}(2)$ gilt.

Für die andere Richtung sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2),$$

das heisst

$$I_2 = AA^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix},$$

also $a^2 + b^2 = 1$ und $c^2 + d^2 = 1$. Nun gilt

$$\begin{aligned} ac + bd &= 0 \\ ac &= -bd \\ a^2c^2 &= b^2d^2 \\ a^2(1 - d^2) &= (1 - a^2)d^2 \\ a^2 &= d^2 \\ a &= \pm d \end{aligned}$$

und also auch $c^2 = 1 - d^2 = 1 - a^2 = b^2$. Wenn $a = d = 1$, dann ist $A = I_2$. Sonst folgt aus $\det(A) = ad - bc = 1$ und $a, b < 1$, dass b und c unterschiedliche Vorzeichen haben müssen, also $c = -b$. Die Bedingung $0 = ac + bd = -ab + bd$ führt nun zu $a = d$. A ist also von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

mit $a^2 + b^2 = 1$. Da $a \in [-1, 1]$, gibt es ein eindeutiges $t \in [0, \pi]$, so dass $\cos(t) = a$. Falls b positiv ist, dann haben wir $b = \sin(t)$. Falls b negativ ist, dann haben wir $\cos(-t) = \cos(t) = a$ und $b = -\sin(t) = \sin(-t)$, also gilt

$$\mathrm{SO}(2) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \mathfrak{so}(2).$$

6. Sei $d \geq 0$ und betrachte $D : \mathbb{R}[x]_d \to \mathbb{R}[x]_d$, $D(p(x)) = p'(x)$.
   (a) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}[x]_d$, sodass $[D]_{\mathcal{B}}$ eine Jordan Normalform ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $\exp(D)$ die Abbildung $p(x) \mapsto p(x + 1)$ ist.
   (c) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}[x]_d$, sodass gilt $(\star)$

$$[\exp(D)]_{\mathcal{B}'} = I_{d+1} + [D]_{\mathcal{B}}.$$

Lösung:

(a) Sei $\mathcal{B} = (p_0, \dots, p_d)$ mit

$$p_k(x) = \frac{1}{k!}x^k \quad (0 \leq k \leq d).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} D(p_0) =& 0 \quad \text{und} \\ D(p_k)(x) =& \frac{k}{k!}x^{k-1} = p_{k-1}(x) \quad (k > 0). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $[D]_\mathcal{B} = J_{0,d+1}$ in Jordan-Normalform.

(b) Um $\exp(D)$ zu bestimmen, reicht es $\exp([D]_\mathcal{B})$ zu bestimmen. Aus obiger Rechnung folgt mittels Induktion, dass

$$D^\ell(p_k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \ell > k \\ p_{\ell-k} & \text{sonst} \end{cases}$$

und folglich ist

$$[D^\ell]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & I_{d+1-\ell} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \leq \ell \leq d).$$

Es folgt

$$\exp([D]_\mathcal{B}) = I_{d+1} + \sum_{\ell=1}^{d} \frac{1}{\ell!} \begin{pmatrix} 0 & I_{d+1-\ell} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{d!} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(d-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\exp([D]_\mathcal{B})_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k > \ell \\ \frac{1}{(\ell-k)!} & \text{sonst} \end{cases}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} p_0(x+1) =& p_0(x) \\ p_\ell(x+1) =& \frac{1}{l!}(x+1)^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{\ell!} \binom{\ell}{k} X^k \\ =& \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{(\ell-k)!} p_k(x) \end{aligned}$$

und folglich gilt für Abbildung T gegeben durch $T(p(x)) = p(x+1)$, dass $[T]_\mathcal{B} = \exp([D_\mathcal{B}])$.

Andererseits ist die Abbildung $\mathrm{End}(\mathbb{R}[x]_d) \to M_{d+1 \times d+1}(\mathbb{R})$, $S \mapsto [S]_\mathcal{B}$ ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum, und insbesondere stetig. Da für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} [D]_\mathcal{B}^k = \Big[\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k \Big]_\mathcal{B},$$

folgt aus der Stetigkeit ($N \to \infty$)

$$[\exp(D)]_\mathcal{B} = \exp([D]_\mathcal{B}) = [T]_\mathcal{B}$$

und somit $\exp(D) = T$ wegen Injektivität von $[\cdot]_\mathcal{B}$.

(c) Wegen vorangehender Diskussion wissen wir, dass für die Basis $\mathcal{B}$ gilt $p_{[T]_\mathcal{B}}(x) = (1-x)^{d+1}$ und somit wissen wir, dass T über $\mathbb{R}$ eine Jordan Normalform $\mathbb{R}$ besitzt. In der Ausfgabenstellung wird vorweggenommen, dass ein Zyklus zu einem Eigenvektor existiert, der ganz $\mathbb{R}[x]_d$ erzeugt, und dass dieser Eigenvektor bis auf skalare Vielfache eindeutig ist.

Wir behaupten, dass die folgende Basis die gewünschte Eigenschaft hat:

$$q_k(x) = \frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(x-\ell) \quad (0 \leq k \leq d),$$

wobei wir uns an die Konvention $\prod_{\ell\in\emptyset} a_\ell = 1$ halten.

Sei $k > 0$. Man berechnet für $n \in \mathbb{N}$

$$q_k(n) = \frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(n-l) = \binom{n}{k}.$$

Es gilt insbesondere

$$q_k(n+1) = \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = q_k(n) + q_{k-1}(n),$$

sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$T(q_k)(n) = q_k(n) + q_{k-1}(n),$$

und da zwei Polynome, die an unendlich vielen Stellen übereinstimmen, identisch sein müssen, folgt

$$T(q_k) = q_k + q_{k-1}.$$

Für $k = 0$ ist $q_k = 1$ und somit $T(q_k) = q_k$, wie gewünscht.

7. (a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem (2)

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= y(t) \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen $x(1) = 0, y(1) = e$.

(b) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= -6x(t) + 9y(t) \\ y'(t) &= -6x(t) + 6y(t) - 2z(t) \\ z'(t) &= 9x(t) - 9y(t) + 3z(t) \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

Hinweis: Verwende die Jordansche Normalform.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + 9y(t) + 9z(t) \\ y'(t) &= 3x(t) - 6y(t) - 8z(t) \\ z'(t) &= -4x(t) + 11y(t) + 13z(t) \end{aligned}$$

zu der Anfangsbedingung $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

Lösung:

(a) Wir schreiben
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$
mit der Lösung
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$
für Konstanten c_x, c_y. Mit den Anfangsbedingungen bekommen wir $c_y = 1$ und
$$0 = c_x e + c_y 1 e = c_x e + e,$$
also $c_x = -1$. Wir haben also die Lösung
$$\begin{aligned} x(t) &= -e^t + te^t \\ y(t) &= e^t. \end{aligned}$$

(b) Wir schreiben das System als
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ -6 & 6 & -2 \\ 9 & -9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$
und die allgemeine Lösung ist
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix}$$
Um $\exp(tA)$ berechnen zu können, bringen wir A in Jordan-Normalform. Wir haben $p_A(x) = -x^2(x-3)$ und für den Eigenwert 3 ist
$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
ein Eigenvektor. Für den Eigenwert 0 betrachten wir
$$A^2 = \begin{pmatrix} -18 & 0 & -18 \\ -18 & 0 & -18 \\ 27 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$
und die Kette
$$\begin{aligned} &\emptyset \subseteq \mathrm{Ker}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(A^2) \subseteq \dots \\ &\emptyset \subseteq \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \subseteq \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$
für die Basis $\mathcal{B} = \{Ae_2, e_2, v_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ bekommen wir
$$P = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 2 \\ -9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

und es gilt $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = J$. Wir sehen, dass $\exp(tJ) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$, also ist

$$\exp(tA) = \exp(tPJP^{-1}) = P\exp(tJ)P^{-1} = \begin{pmatrix} 3-2e^{3t} & 9t & 6t+2-2e^{3t} \\ 2-2e^{3t} & 6t+1 & 4t+2-2e^{3t} \\ 3e^{3t}-3 & -9t & 3e^{3t}-6t2-2 \end{pmatrix}$$

und die Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= 5+15t-4e^{3t} \\ y(t) &= 5+10t-4e^{3t} \\ z(t) &= -5-15t+6e^{3t}. \end{aligned}$$

(c) Mit $f(t) := (x(t), y(t), z(t))^T$ und

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 9 & 9 \\ 3 & -6 & -8 \\ -4 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

und $v := (1,1,1)^T$ ist das System der Aufgabe äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}f(t) = A \cdot f(t), \quad f(0) = v\,.$$

Die eindeutige Lösung ist also $f(t) = \exp(At)v$.

Wir bringen die Matrix A in Jordansche Normalform und rechnen anschliessend direkt. Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_A(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3\,.$$

Sei $B := A - 2I_3$. Dann gilt

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 9 \\ 3 & -8 & -8 \\ -4 & 11 & 11 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

und $B^k = 0$ für alle $k \geq 3$. Sei $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Ker}(B^2)$ ein beliebiges Element, zum Beispiel sei

$$w := (1,0,0)\,.$$

Dann bilden die Vektoren w, Bw, B^2w eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und mit

$$S := (B^2w, Bw, w) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

folgt die Darstellung von A in Jordanscher Normalform:

$$A = S \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot S^{-1}\,.$$

Es folgt für alle $k \geq 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 2^k & \binom{k}{1}2^{k-1} & \binom{k}{2}2^{k-2} \\ 0 & 2^k & \binom{k}{1}2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix},$$

also

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k t^k = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} f(t) = \exp(At)v &= S \cdot \exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} t\right) \cdot S^{-1}v \\ &= S \cdot \exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} t\right) \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= -S \cdot \left(e^{2t} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + te^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 e^{2t} \begin{pmatrix} [r]5/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{2t} \begin{pmatrix} 15 \\ -13 \\ 18 \end{pmatrix} + t^2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$