Serie 13

Dualräume
Abgabe 31.5. 2021

Hinweis: In dieser Serie ist V ein K-Vektorraum. Sie können Punkte in den Aufgaben 2(b), 3 und 7(a) bekommen. Am 24. 5. 2021 findet keine Übungsstunde statt. Sie können aber trotzdem ihre Serien online abgeben.

1. Sei I eine beliebige Menge. Für $i \in I$ sei $e_i : I \to K$ durch

$$e_i(j) = \delta_{ij} \text{ für alle } j \in I$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}((e_i)_{i\in I}) = K^{(I)} := \{f : I \to K \mid |\operatorname{supp}(f)| < \infty\} \subseteq K^I$.

(b) Verwenden Sie Proposition 10.1.1, um zu zeigen, dass $(K^{(I)})^* \cong K^I$.

Lösung:

(a) Laut Lemma 2.2.6 besteht $\mathrm{Sp}((e_i)_{i\in I})$ aus allen endlichen Linearkombinationen, das heisst für jedes $f \in \mathrm{Sp}((e_i)_{i\in I})$ gibt es eine endliche Menge $J \subseteq I$ und $\lambda_j \in K$, so dass

$$f = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j.$$

Wir haben $\operatorname{supp}(f) = \{i \in I : f(i) \neq 0\} = \{j \in J \subseteq I : \lambda_j \neq 0\}$, welche endlich ist.

Andererseits, wenn wir eine Funktion $f : I \to K$ mit endlichem Support haben, dann können wir sie als

$$f = \sum_{i\in \operatorname{supp}(f)} f(i) e_i$$

schreiben und bekommen $f \in \mathrm{Sp}((e_i)_{i\in I})$. Deshalb sind die beiden Mengen gleich.

(b) Proposition 10.1.1 besagt, dass wenn $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V ist, Dann ist $V^\star$ isomorph zu K^I.

In unserem Fall ist $(v_i)_{i\in I} = (e_i)_{i\in I}$ eine Basis, da die $(e_i)_{i\in I}$ linear unabhängig sind und laut (a) den Vektorraum $K^{(I)}$ aufspannen. Aus der Proposition folgt für $V = K^{(I)}$, dass

$$(K^{(I)})^\star = K^I.$$

2. Wir betrachten den K-Vektorraum $V = M_{2\times 2}(K)$ mit der Standardbasis

$$\mathcal{E} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Geben Sie die duale Basis $\mathcal{E}^\star$ explizit an.

(b) Sei $\mathcal{B} = \left\{ e_1, e_2, e_3, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine weitere Basis von V. Für die Elemente der dualen Basis $\mathcal{B}^\star =$ (2) $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ geben Sie die Darstellungsmatrizen $[\varphi_i]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}_1}$ an, wobei $\mathcal{E}_1 = \{1_K\} \subseteq K$. Überprüfen Sie, dass die Bedingungen der dualen Basis erfüllt sind. Bemerken Sie, dass sich in der Basis $\mathcal{B}$ nur ein Vektor geändert hat, in der dualen Basis $\mathcal{B}^\star$ sind jedoch mehrere Elemente unterschiedlich.

Lösung:

(a) Die linearen Funktionen

$$\begin{aligned} &M_{2\times 2}(K) \to K \\ f_1\colon \quad &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a \\ f_2\colon \quad &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto b \\ f_3\colon \quad &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto c \\ f_4\colon \quad &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto d \end{aligned}$$

erfüllen gerade $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ und sind somit eine duale Basis.

(b) Wir verwenden Proposition 10.2.6 aus dem Skript. Wir haben die Basiswechselmatrix

$$[Id_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und berechnen ihr Inverses:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wir bekommen die duale Basis $\mathcal{B}^\star$

$$\begin{aligned} [\varphi_1]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ [\varphi_2]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ [\varphi_3]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ [\varphi_4]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerken Sie, dass sich die Basen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{B}$ nur durch einen Vektor unterscheiden, jedoch die dualen Basen $\mathcal{E}^\star$ und $\mathcal{B}^\star$ sich durch drei Vektoren unterscheiden.

3. Seien V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume. Zeigen Sie, dass (2)

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(V, W) &\to \mathrm{Hom}(W^\star, V^\star) \\ T &\mapsto T^\star \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Lösung:

Eine High-level-Lösung dieser Aufgabe besteht darin, dass man Proposition 10.4.11 aus dem Skript verwendet, die besagt, dass für geordnete Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W gilt:

$$[T^\star]^{\mathcal{C}^\star}_{\mathcal{B}^\star} = ([T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}})^T.$$

Dann haben wir, dass $T \mapsto T^\star$ die Komposition

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(V,W) &\to M_{\dim(W)\times\dim(V)}(K) &&\to M_{\dim(V)\times\dim(W)}(K) &&\to \mathrm{Hom}(W^\star,V^\star)\\
T &\mapsto [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} &&\mapsto ([T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}})^T = [T^\star]^{\mathcal{C}^\star}_{\mathcal{B}^\star} &&\mapsto T^\star
\end{aligned}$$

ist und somit als Verkettung von Isomorphismen auch ein Isomorphismus.

Alternativ kann man die Aussage direkt zeigen:

Sei $\mathcal{B} = \{w_i\}_{i\in I}$ eine Basis von W und $\mathcal{B}^\star = \{\psi_i\}_{i\in I} \subset W^\star$ die duale Menge, das heisst es gilt $\psi_i(w_j) = \delta_{ij}$. Da W endlichdimensional ist, ist $\mathcal{B}^\star$ sogar eine Basis von $W^\star$ (Prop 10.2.4).

Wir zeigen zuerst die Injektivität. Wir möchten zeigen, dass der Kern

$$\mathrm{Ker}(T \mapsto T^\star) = \{T \in \mathrm{Hom}(V,W) \colon T^\star = 0\} = 0$$

ist. Sei T im Kern und $v \in V$ beliebig. Wir können $T(v) = \sum_{i\in I} \lambda_i w_i$ schreiben. Für jedes $j \in I$ gilt $T^\star(\psi_j) = \psi_j \circ T = 0$, und somit

$$T^\star(\psi_j)(v) = \psi_j\left(\sum_{i\in I} \lambda_i w_i\right) = \lambda_j = 0.$$

Wir haben also, dass für jedes $j \in I$, $\lambda_j = 0$, also ist $T(v) = 0$ für jedes $v \in V$ und somit $T = 0$. Wir haben gezeigt, dass der Kern nur das Element $T = 0$ enthält und somit ist die Abbildung injektiv.

Umgekehrt, sei $S \in \mathrm{Hom}(W^\star, V^\star)$ beliebig. Für $v \in V, j \in I$ definieren wir $\lambda_j(v) := S(\psi_j)(v)$ und

$$T(v) = \sum_{j\in I} \lambda_j(v) w_j.$$

Mit dieser Definition ist T linear, da $\lambda_j(\mu v + v') = S(\psi_j)(\mu v + v') = \mu S(\psi_j)(v) + S(\psi_j)(v') = \mu\lambda_j(v) + \lambda_j(v')$ linear ist. Für jedes $i \in I$ gilt $\psi_i(T(v)) = \psi_i\left(\sum_{j\in I} \lambda_j(v) w_j\right) = \lambda_i(v) = S(\psi_i)(v)$, also $\psi_i \circ T = S(\psi_i)$. Für jedes $\psi \in W^\star$ gibt es eine Darstellung $\psi = \sum_{i\in I} \mu_i \psi_i$ und wir haben

$$T^\star(\psi) = \psi \circ T = \left(\sum_{i\in I} \mu_i \psi_i\right) \circ T = \left(\sum_{i\in I} \mu_i \psi_i \circ T\right) = \left(\sum_{i\in I} \mu_i S(\psi_i)\right) = S\left(\sum_{i\in I} \mu_i \psi_i\right) = S(\psi),$$

was die Surjektivität zeigt. Wir bemerken, dass wir in der Surjektivität benötigten, dass $\mathcal{B}^\star$ eine Basis von $W^\star$ ist. Für unendlichdimensionale Vektorräume gilt die Aussage im Allgemeinen nicht.

4. Sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und $U \subseteq W$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass $T^\star(U^0) = (T^{-1}(U))^0$.

Lösung:

Wir haben zwei Bedingungen an $\varphi \in V^\star$. Die erste Bedingung ist

$$\varphi \in T^\star(U^0) \iff \exists \psi \in W^\star \colon \varphi = \psi \circ T \wedge \forall u \in U \colon \psi(u) = 0.$$

Die zweite Bedingung ist

$$\varphi \in (T^{-1}(U))^0 \iff \forall v \in V \colon (T(v) \in U \to \varphi(v) = 0).$$

Sei zuerst $\varphi \in V^\star$, so dass die erste Bedingung erfüllt ist. Sei $v \in V$, so dass $T(v) \in U$. Dann gilt $\varphi(v) = \psi \circ T(v) \in \psi(U) \subseteq \{0\}$. Somit erfüllt φ auch die zweite Bedingung.

Wenn jetzt $\varphi \in V^\star$ die zweite Bedingung erfüllt, dann gehen wir wie folgt vor. Wir können $W = \mathrm{Im}(T) \oplus W'$ als direkte Summe für einen Untervektorraum $W' \subset W$ schreiben. Dann definieren wir

$$\begin{aligned}\psi \colon W = \mathrm{Im}(T) \oplus W' &\to K \\ T(v) + w' &\mapsto \varphi(v).\end{aligned}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da wenn $T(v) = T(v')$ gilt, dann auch $T(v - v') = 0 \in U$, also nach der zweiten Bedingung $\varphi(v - v') = 0$, also $\varphi(v) = \varphi(v')$. Wir bemerken, dass für alle $v \in V$ gilt $\psi \circ T(v) = \psi(T(v)) = \varphi(v)$, also $\psi \circ T = \varphi$ und für $u = T(v) + w' \in U = \mathrm{Im}(T) \cap U \oplus W' \cap U$ gilt $\psi(u) = \varphi(v) = 0$, da $T(v) \in \mathrm{Im}(T) \cap U \subseteq U$ gilt. Wir haben also gezeigt, dass die Bedingungen äquivalent, und somit die Mengen gleich sind.

5. Sei V ein Vektorraum und $W_1, W_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Zeigen Sie,
   (a) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$,
   (b) $W_1^0 + W_2^0 \subseteq (W_1 \cap W_2)^0$,
   (c) Falls V endlichdimensional ist, dann ist $W_1^0 + W_2^0 = (W_1 \cap W_2)^0$.
   Bemerkung: Für V unendlichdimensional gilt im Allgemeinen in (b) keine Gleichheit.

   Lösung:

   (a) Wenn $\varphi \in (W_1 + W_2)^0$, dann gilt für alle $u = u_1 + u_2 \in W_1 + W_2$, dass $\varphi(u) = 0$. So ein φ erfüllt auch $\varphi(u_1) = (u_1 + 0) = 0$ für alle $u_1 \in W_1$ und $\varphi(u_2) = (0 + u_2) = 0$ für alle $u_2 \in W_2$. Somit ist $\varphi \in W_1^0 \cap W_2^0$.

   Wenn umgekehrt $\varphi(u_1) = 0 = \varphi(u_2)$ für alle $u_1 \in W_1$ und $u_2 \in W_2$, dann gilt auch für alle $u \in W_1 + W_2$, dass $\varphi(u) = 0$, da wir $u_1 \in W_1$ und $u_2 \in W_2$ finden können mit $u = u_1 + u_2$.

   (b) Sei $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \in W_1^0 + W_2^0$, das heisst für alle $u_1 \in W_1$ gilt $\varphi_1(u_1) = 0$ und für alle $u_2 \in W_2$ gilt $\varphi_2(u_2) = 0$. Wenn wir ein $u \in W_1 \cap W_2$ haben, dann ist $\varphi_1(u) = \varphi_2(u) = 0$, also ist $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \in (W_1 \cap W_2)^0 + (W_1 \cap W_2)^0 = (W_1 \cap W_2)^0$.

   (c) Für V und $W \subseteq V$ endlichdimensional gilt $\dim W^0 = \dim V - \dim W$, was wir für $W_1, W_2, W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2$ verwenden. Wir zeigen, dass

$$\begin{aligned}\dim(W_1^0 + W_2^0) &= \dim W_1^0 + \dim W_2^0 - \dim(W_1^0 \cap W_2^0) \\ &\overset{W=W_1}{=} \dim V - \dim W_1 + \dim W_2^0 - \dim(W_1^0 \cap W_2^0) \\ &\overset{W=W_2}{=} \dim V - \dim W_1 + \dim V - \dim W_2 - \dim(W_1^0 \cap W_2^0) \\ &\overset{(a)}{=} \dim V - \dim W_1 + \dim V - \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2)^0 \\ &\overset{W=W_1+W_2}{=} \dim V - \dim W_1 + \dim V - \dim W_2 - \dim V + \dim(W_1 + W_2) \\ &= \dim V - \dim W_1 + \dim V - \dim W_2 - \dim V + \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \\ &= \dim V - \dim(W_1 \cap W_2) \overset{W=W_1\cap W_2}{=} \dim(W_1 \cap W_2)^0\end{aligned}$$

   und da die Vektorräume in (b) die gleiche Dimension haben, müssen sie gleich sein.

6. Sei $V = \mathbb{R}[t]_2$ der Vektorraum der rellen Polynome von Grad ≤ 2. Für $p \in V$ definieren wir

$$f_1(p) = \int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(t)\,\mathrm{d}t, \quad f_3(p) = -\int_{-1}^0 p(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

   (a) Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 linear sind, also Elemente des Dualraums $V^\star$ definieren.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ eine Basis von $V^\star$ bildet.

(c) Berechnen Sie die duale Basis $\mathcal{B}^\star \subseteq V^{\star\star} \cong V$ und geben sie die entsprechenden Vektoren in V unter Verwendung der natürlichen Identifikation $V^{\star\star} \to V$ an.

Lösung:

(a) Integrale sind linear, deshalb sind auch die f_i linear.

(b) Für $p(x) = ax^2 + bx + c$ haben wir

$$\begin{aligned} f_1(p) &= \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c \\ f_2(p) &= \frac{8}{3}a + 2b + 2c \\ f_3(p) &= \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + c \end{aligned}$$

Ein Element $f \in V^\star$ ist Null genau dann wenn $f(p) = 0$ für alle $p \in V$. Wir zeigen, dass $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist. Sei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$. Das heisst, für alle a, b, c gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c) + \alpha_2(\frac{8}{3}a + 2b + 2c) + \alpha_3(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + c) \\ &= a(\frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{8}{3}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3) + b(\frac{1}{2}\alpha_1 + 2\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3) + c(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) \end{aligned}$$

Wenn wir wahlweise a, b oder c gleich 1 setzen und die anderen gleich 0, sehen wir, dass

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

gelten muss. Da die Determinante der Matrix gleich $\frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = -2 \neq 0$ ist, muss $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$ sein und somit ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig. Da V und somit $V^\star$ dreidimensional ist, ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $V^\star$.

(c) Um eine Bidualbasis in $V^{\star\star}$ zu finden wenden wir Proposition 10.2.6 auf $V^\star$ an. Wir definieren eine Standardbasis $\mathcal{E} \subseteq V^\star$ bestehend aus

$$\begin{aligned} e_1 &: ax^2 + bx + c \mapsto a \\ e_2 &: ax^2 + bx + c \mapsto b \\ e_3 &: ax^2 + bx + c \mapsto c \end{aligned}$$

und beschreiben

$$[Id_{V^\star}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit inverser Matrix

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Also ist $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = \mathcal{B}^\star \subset V^{\star\star}$ in der Basis $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} [\varphi_1]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ [\varphi_2]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ [\varphi_3]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

was unter dem Isomorphismus $V^{\star\star} \cong V$ den Elementen

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{3}{2}x^2 + x + 1 \\ p_2 &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6} \\ p_3 &= \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

entspricht. In der Tat gilt

$$\mathrm{ev}_{p_j}(f_i) = f_i(p_j) = \delta_{ij}.$$

7. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und $W \subseteq V, U \subseteq V^\star$ Unterräume. Wir identifizieren $V^{\star\star} \cong V$ und $V^{\star\star\star} \cong V^\star$ mit den natürlichen Isomorphismen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) $(W^0)^0 = W$. (2)
   (b) $(U^0)^0 = U$.
   (c) Falls $W^0 = U$, dann $U^0 = W$.
   (d) Falls $W \subseteq K^n_{\text{Spalten}}$ mit Basis $\{w_1, \dots, w_k\}$, dann gilt

$$W^0 = \left\{ a \in K^n_{\text{Zeilen}} : a \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ w_1 & \dots & w_k \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = 0_{K^k_{\text{Zeilen}}} \right\} = \left\{ a \in K^n_{\text{Zeilen}} : \begin{pmatrix} \cdots & w_1^T & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & w_k^T & \cdots \end{pmatrix} a^T = 0_{K^k_{\text{Spalten}}} \right\}.$$

   (e) Falls $U \subseteq K^n_{\text{Zeilen}}$ mit Basis $\{u_1, \dots, u_k\}$, dann gilt

$$U^0 = \left\{ x \in K^n_{\text{Spalten}} : \begin{pmatrix} \cdots & u_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & u_k & \cdots \end{pmatrix} x = 0_{K^k_{\text{Spalten}}} \right\}.$$

   (f) Sei $W \subseteq K^n_{\text{Spalten}}$ mit einer Basis $\{w_1, \dots, w_k\}$ und sei

$$U = \left\{ u \in K^n_{\text{Zeilen}} : \begin{pmatrix} \cdots & w_1^T & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & w_k^T & \cdots \end{pmatrix} u^T = 0_{K^k_{\text{Spalten}}} \right\}$$

   mit einer Basis $\{u_1, \dots, u_\ell\} \subseteq K^n_{\text{Zeilen}}$. Erklären Sie warum

$$W = \left\{ x \in K^n_{\text{Spalten}} : \begin{pmatrix} \cdots & u_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & u_\ell & \cdots \end{pmatrix} x = 0_{K^k_{\text{Spalten}}} \right\}.$$

   (g) Betrachten Sie den Untervektorraum $W \subseteq \mathbb{R}^4$ aufgespannt durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie eine Matrix A mit $\mathrm{Ker}(A) = W$.

Lösung:

Wir erinnern uns daran, dass natürliche Isomorphismus durch

$$\begin{aligned} V &\to V^{\star\star} \\ v &\mapsto \mathrm{ev}_v \end{aligned}$$

gegeben ist, wobei

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_v \colon V^\star &\to K \\ \varphi &\mapsto \mathrm{ev}_v(\varphi) := \varphi(v). \end{aligned}$$

In der Aufgabenstellung identifizieren wir V mit $V^{\star\star}$, das heisst wir können w frei mit ev_w vertauschen. Wir können das so machen, da der Isomorphismus kanonisch ist.

Der Annulator von W ist $W^0 = \{\varphi \in V^\star \colon \varphi(v) = 0\ \forall v \in W\}$.

(a) Wir bemerken, dass die Aussage nur mit der Identifikation $V = V^{\star\star}$ Sinn ergibt. Ohne der Identifikation könnte man die Aufgabe umformulieren als: Zeigen Sie, dass W und $(W^0)^0$ kanonisch isomorph sind.

Wir zeigen zuerst, dass jedes $w \in W$ auch in $(W^0)^0$ liegt. Sei dazu $\mathrm{ev}_{\mathrm{w}} \in V^{\star\star}$ das entsprechende Element unter der Identifikation $V = V^{\star\star}$. Sei $\varphi \in W^0$, das heisst insbesondere $\varphi(w) = 0$. Wir haben

$$\mathrm{ev}_w(\varphi) = \varphi(w) = 0,$$

also $w \in (W^0)^0$. Wir haben gezeigt, dass $W \subseteq (W^0)^0$ und argumentieren die andere Inklusion mit der Dimension: In endlichdimensionalen Vektorräumen ist die Dimension von W und $(W^0)^0$ gleich gross, also gilt $W = (W^0)^0$.

(b) Die gleiche Argumentation funktioniert auch für $(U^0)^0 = U$.

(c) Wenn $W^0 = U$, dann ist $U^0 = (W^0)^0 = W$ wegen (a).

(d) Per Definition besteht W^0 aus den Elementen $a \in V^\star = K^n_{\text{Zeilen}}$, für die gilt $aw = 0$ für alle $w \in W$. Ein allgemeines Element $w \in W$ können wir in der Basis schreiben als $w = \sum_{i=0}^k \alpha_i w_i$ und es gilt $aw = 0$ genau dann wenn für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt $aw_i = 0$. Somit gilt

$$W^0 = \left\{ a \in K^n_{\text{Zeilen}} \colon a \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ w_1 & \dots & w_k \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = 0_{K^n_{\text{Zeilen}}} \right\}$$

und die andere Darstellung folgt direkt durch Transposition $w^T a^T = 0^T$.

(e) Die gleiche Argumentation wie in (e) funktioniert hier auch.

(f) Aus (d) wissen wir, dass $U = W^0$ und aus (f) folgt, dass der rechte Ausdruck $U^0 = (W^0)^0$ ist. Mit (a) gilt $W = (W^0)^0$ und somit die Aussage.

(g) Aus (f) wird klar, dass wir gerade eine Basis $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ von W^0 suchen. Dann liefert die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & u_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & u_\ell & \cdots \end{pmatrix}$$

das gewünschte Resultat $\mathrm{Ker}(A) = W$. Wir berechnen W^0 mit (d):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

entspricht dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3a + b + 3c &= 0 \\ 3a + 3b + c + 3d &= 0. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der oberen von der unteren Gleichung bekommen wir

$$2b - 2c + 3d = 0,$$

was zum zweidimensionalen Lösungsraum

$$U = W^0 = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

führt. Also ist

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & u_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & u_\ell & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit $\mathrm{Ker}(A) = W$.