Serie 14

Multilineare Abbildungen
Kein Abgabedatum

Hinweis: In dieser Serie sind $V, V_1, \ldots, V_k, V_1', \ldots, V_k', W$ und W' endlichdimensionale K-Vektorräume. Diese Serie behandelt den Stoff der Vorlesung am 26. 5. 2021. In der letzten Vorlesungswoche wird es noch eine Serie 15 geben, in der das Tensorprodukt geübt werden kann. Die Serien 14 und 15 werden nicht mehr korrigiert und Sie können keine Punkte mehr holen. Sie fungieren aber als wertvolle Übungsmöglichkeit zu den letzten Themen der Vorlesung.

1. Beweisen Sie die folgenden Propositionen:
   (a) $\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_k; W)$ ist ein Unterraum des Raums aller Abbildungen $V_1 \times \cdots \times V_k \to W$.
   (b) $\mathrm{Sym}^k(V, W)$ und $\mathrm{Alt}^k(V, W)$ sind Untervektorräume von $\mathrm{Mult}(V^k, W)$.
   (c) Seien $f_i\colon V_i' \to V_i$ für $1 \leq i \leq k$ sowie $g\colon W \to W'$ lineare Abbildungen. Dann erhalten wir eine lineare Abbildung
   $$\begin{aligned} \mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_k; W) &\to \mathrm{Mult}(V_1', \ldots, V_k'; W'), \\ \phi &\mapsto g \circ \phi \circ (f_1 \times \cdots \times f_k). \end{aligned}$$
   (d) Lineare Abbildungen $f\colon V' \to V$ und $g\colon W \to W'$ induzieren lineare Abbildungen
   $$\begin{aligned} \mathrm{Sym}^k(V, W) &\to \mathrm{Sym}^k(V', W'), \\ \mathrm{Alt}^k(V, W) &\to \mathrm{Alt}^k(V', W'), \\ \varphi &\mapsto g \circ \varphi \circ (f \times \ldots \times f). \end{aligned}$$

Lösung:

(a) Für jede Wahl von $1 \leq i \leq k$ und von Vektoren $v_j \in V_j$ für $j \neq i$ betrachte die Abbildung

$$\epsilon :\ V_i \longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_k, \quad v \mapsto (v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_k).$$

Wir merken uns, dass ϵ von der Wahl von $i, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$ abhängt, auch wenn wir dies der Übersichtlichkeit wegen in der Notation unterdrücken. Nach Definition ist eine Abbildung $\phi\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ multilinear genau dann, wenn für jede Wahl von $i, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$ die zusammengesetzte Abbildung $\phi \circ \epsilon\colon V_i \to W$ linear ist.

Für die Null-Abbildung $\phi_0\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ ist $\phi_0 \circ \epsilon$ wieder die Null-Abbildung, also linear. Sodann seien $\phi_1, \phi_2\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ multilineare Abbildungen und sei $\lambda \in K$. Dann sind $\phi_1 \circ \epsilon$ und $\phi_2 \circ \epsilon$ linear und folglich auch $(\phi_1 + \phi_2) \circ \epsilon_i = \phi_1 \circ \epsilon_i + \phi_2 \circ \epsilon_i$ sowie $(\lambda \cdot \phi_1) \circ \epsilon = \lambda \cdot (\phi_1 \circ \epsilon)$, weil wir bereits wissen, dass jedes skalare Vielfache und jede Summe von linearen Abbildungen wieder linear ist. Durch Variieren von $i, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$ und somit von ϵ folgt, dass ϕ_0 und $\phi_1 + \phi_2$ und $\lambda \cdot \phi_1$ multilinear sind.

Zusammen zeigt dies, dass $\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_k; W)$ ein Unterraum ist.

(b) Wenn $\varphi \in \mathrm{Mult}^r(V, W)$ symmetrisch oder alternierend ist, dann ist jedes Vielfache ebenso symmetrisch oder alternierend. Für symmetrische oder alternierende $\varphi, \psi \in \mathrm{Mult}^r(V, W)$ folgt auch direkt, dass $\varphi + \psi$ symmetrisch oder alternierend ist. Somit sind $\mathrm{Sym}^k(V, W)$ und $\mathrm{Alt}^k(V, W)$ Untervektorräume.

(c) Für jede Wahl von $1 \leq i \leq k$ und von Vektoren $v'_j \in V'_j$ für $j \neq i$ betrachte die Abbildung

$$\epsilon' : \; V'_i \longrightarrow V'_1 \times \cdots \times V'_k, \quad v' \mapsto (v'_1, \ldots, v'_{i-1}, v', v'_{i+1}, \ldots, v'_k).$$

Nach Definition ist eine Abbildung $\phi' \colon V'_1 \times \cdots \times V'_k \to W'$ multilinear genau dann, wenn für jede Wahl von $i, v'_1, \ldots, v'_{i-1}, v'_{i+1}, \ldots, v'_k$ die zusammengesetzte Abbildung $\phi' \circ \epsilon' \colon V'_i \to W'$ linear ist. Setzen wir ausserdem $v_j := f_j(v'_j)$ für alle $j \neq i$ und $\epsilon \colon V_i \to V_1 \times \cdots \times V_k$ wie in (a), so gilt $(f_1 \times \cdots \times f_k) \circ \epsilon' = \epsilon \circ f_i$.

Betrachte nun eine multilineare Abbildung $\phi \in \mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_k; W)$. Für jede Wahl von $i, v'_1, \ldots, v'_{i-1}, v'_{i+1}, \ldots, v'_k$ und folglich von ϵ' und ϵ wie oben ist dann $\phi \circ \epsilon \colon V_i \to W$ linear und folglich auch

$$g \circ \phi \circ (f_1 \times \cdots \times f_k) \circ \epsilon' = g \circ (\phi \circ \epsilon) \circ f_i$$

als Verknüpfung von linearen Abbildungen linear. Also ist $g \circ \phi \circ (f_1 \times \cdots \times f_k)$ multilinear; die Abbildung in der Proposition ist daher wohldefiniert.

Schliesslich betrachte multilineare Abbildungen $\phi_1, \phi_2 \colon V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ und $\lambda \in K$. Weil g eine lineare Abbildung ist, folgt

$$g \circ (\lambda\phi_1 + \phi_2) \circ (f_1 \times \cdots \times f_k) = \lambda g \circ \phi_1 \circ (f_1 \times \cdots \times f_k) + g \circ \phi_2 \circ (f_1 \times \cdots \times f_k).$$

Also ist die Abbildung in der Proposition linear.

(d) Wenn $\phi \in \mathrm{Mult}^k(V, W)$ symmetrisch ist, das heisst

$$\phi(v_{\sigma 1}, \ldots, v_{\sigma k}) = \phi(v_1, \ldots, v_k)$$

für alle $\sigma \in S_k$ und $v_i \in V$, dann ist auch

$$\begin{aligned} g \circ \phi \circ (f \times \cdots \times f)(v'_{\sigma 1}, \ldots, v'_{\sigma k}) &= g \circ \phi(f(v'_{\sigma 1}), \ldots, f(v'_{\sigma k})) \\ &\overset{*}{=} g \circ \phi(f(v'_1), \ldots, f(v'_k)) \\ &= g \circ \phi \circ (f \times \cdots \times f)(v'_1, \ldots, v'_k), \end{aligned}$$

wobei die Gleichheit (*) stimmt, wenn man $v_i = f(v'_i)$ setzt. Somit ist $g \circ \phi \circ (f \times \cdots \times f)$ ebenfalls symmetrisch.

Wenn $\phi \in \mathrm{Mult}^k(V, W)$ symmetrisch ist, das heisst immer wenn $v_i = v_j \in V$ für $i \neq j$, dann gilt

$$\phi(v_1, \ldots, v_k) = 0.$$

für alle $v_i \in V$.

Sei jetzt $v'_i \in V'$ mit $v'_i = v'_j$ und $i \neq j$. Dann ist $f(v'_i) = f(v'_j) \in V$ und somit

$$g \circ \phi \circ (f \times \cdots \times f)(v'_{\sigma 1}, \ldots, v'_{\sigma k}) = g \circ \phi(f(v'_{\sigma 1}), \ldots, f(v'_{\sigma k})) = 0,$$

was zeigt, dass $g \circ \phi \circ (f \times \cdots \times f)$ alternierend ist.

2. Was ist die Dimension von $\mathrm{Mult}_K(V, V^\star; V)$? Finden Sie eine Basis.

Lösung:

Nach der Formel für die Dimension gilt

$$\dim \mathrm{Mult}_K(V, V^\star; V) = \dim V \cdot \dim V^\star \cdot \dim V = (\dim V)^3.$$

Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $e_1^\star, \ldots, e_n^\star \in V^\star$ die duale Basis dazu (Bemerke, V endlichdimensional, also ist es eine Basis). Dann ist eine Basis von $\mathrm{Mult}_K(V, V^\star; V)$ gegeben durch

$$\left\{ f_{ijk} \colon \left(\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell e_i, \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell e_\ell^\star \right) \mapsto \lambda_i \mu_j e_k \right\}_{i,j,k \in \{1,\ldots,n\}}.$$

3. Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi \colon V \times V \times V \to V$$
$$\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \cdot v_1 \cdot w_1 \\ \vdots \\ u_n \cdot v_n \cdot w_n \end{pmatrix}$$

wobei $n = \dim V$.

(a) Zeigen Sie, dass φ eine multilineare Abbildung ist.

(b) Ist φ symmetrisch?

(c) Ist φ alternierend?

Lösung:

(a) Wir zeigen, dass φ im ersten Argument linear ist, sei $u, u', v, w \in V$ und $\lambda \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda u + u', v, w) &= \begin{pmatrix} (\lambda u_1 + u_1') \cdot v_1 \cdot w_1 \\ \vdots \\ (\lambda u_n + u_n') \cdot v_n \cdot w_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} u_1 \cdot v_1 \cdot w_1 \\ \vdots \\ u_n \cdot v_n \cdot w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1' \cdot v_1 \cdot w_1 \\ \vdots \\ u_n' \cdot v_n \cdot w_n \end{pmatrix} = \lambda \varphi(u, v, w) + \varphi(u', v, w) \end{aligned}$$

und aus der Symmetrie in (b) folgt, dass auch die anderen Einträge linear sind.

(b) Da die Multiplikation in K kommutiert gilt für alle 6 Permutationen

$$u \cdot v \cdot w = u \cdot w \cdot v = v \cdot u \cdot w = v \cdot w \cdot u = w \cdot u \cdot v = w \cdot v \cdot u.$$

Deshalb gilt auch

$$\varphi(u, v, w) = \varphi(u, w, v) = \varphi(v, u, w) = \varphi(v, w, u) = \varphi(w, u, v) = \varphi(w, v, u)$$

und somit ist φ symmetrisch.

(c) φ ist nicht alternierend. Wenn zum Beispiel $u = v = w = (1, 0, \ldots, 0)^T$, dann ist

$$\varphi(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

4. Sei $\varphi \colon V^k \to W$ eine alternierende Multilinearform. Zeigen sie, dass φ antisymmetrisch ist, das heisst $\forall v_1, \ldots v_k \in V \ \forall \sigma \in S_k \colon \varphi(v_{\sigma 1}, \ldots, v_{\sigma k}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \varphi(v_1, \ldots, v_k)$.

Bemerkung: Sie dürfen die Tatsache verwenden, dass S_n von Transpositionen erzeugt wird.

Lösung:

Wir betrachten was passiert, wenn $\sigma_{ij} \in S_n$ eine Transposition ist, die i mit $j = \sigma_{ij}(i)$ vertauscht und alles andere in Ruhe lässt. Sei $v_1, \ldots, v_k \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 =& \varphi(v_1, \ldots, v_i + v_{\sigma_{ij}i}, \ldots, v_j + v_{\sigma_{ij}j}, \ldots, v_k) \\
=& \varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) + \varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_{\sigma_{ij}j}, \ldots, v_k) + \\
& \varphi(v_1, \ldots, v_{\sigma_{ij}i}, \ldots, v_j, \ldots, v_k) + \varphi(v_1, \ldots, v_{\sigma_{ij}i}, \ldots, v_{\sigma_{ij}j}, \ldots, v_k) \\
=& \varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) + 0 + 0 + \varphi(v_1, \ldots, v_{\sigma_{ij}i}, \ldots, v_{\sigma_{ij}j}, \ldots, v_k),
\end{aligned}$$

also

$$\varphi(v_{\sigma_{ij}1, \ldots, v_{\sigma_{ij}k}}) = \varphi(v_1, \ldots, v_{\sigma_{ij}i}, \ldots, v_{\sigma_{ij}j}, \ldots, v_k) = -\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k).$$

Da wir jede Permutation $\sigma \in S_k$ als Produkt von Transpositionen

$$\sigma = \sigma_{i_1 j_1} \sigma_{i_2 j_2} \cdots \sigma_{i_\ell j_\ell}$$

schreiben können, bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\varphi(v_{\sigma 1}, \ldots, v_{\sigma k}) &= \varphi(v_{\sigma_{i_1 j_1} \sigma_{i_2 j_2} \cdots \sigma_{i_\ell j_\ell} 1}, \ldots, v_{\sigma_{i_1 j_1} \sigma_{i_2 j_2} \cdots \sigma_{i_\ell j_\ell} k}) \\
&= -\varphi(v_{\sigma_{i_2 j_2} \cdots \sigma_{i_\ell j_\ell} 1}, \ldots, v_{\sigma_{i_2 j_2} \cdots \sigma_{i_\ell j_\ell} k}) \\
&= \varphi(v_{\sigma_{i_3 j_3} \cdots \sigma_{i_\ell j_\ell} 1}, \ldots, v_{\sigma_{i_3 j_3} \cdots \sigma_{i_\ell j_\ell} k}) \\
&= \ldots = (-1)^{\ell - 1} \varphi(v_{\sigma_{i_\ell j_\ell} 1}, \ldots, v_{\sigma_{i_\ell j_\ell} k}) \\
&= (-1)^\ell \varphi(v_1, \ldots, v_k)
\end{aligned}$$

und da $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^\ell$ ist φ antisymmetrisch.

5. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige alternierende Abbildung $\Phi \in \mathrm{Alt}_K^n(V, K)$ gibt, so dass $\Phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$.

   Bemerkung: Dies zeigt, wie man die Determinante für allgemeine abstrakte Vektorräume definieren Kann. In Kapitel 4 haben wir genau das für $V = K^n_{Zeilen}$ und die Standardbasis gemacht.

   Lösung:

   Sei $d = \det(v_1, \ldots, v_n)$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
\Phi \colon V^n &\to K \\
(u_1, \ldots, u_n) &\mapsto \frac{1}{d} \det(u_1, \ldots, u_n)
\end{aligned}$$

   eine Multilinearform mit $\Phi(v_1, \ldots, v_n) = d/d = 1$. Aus dem Kapitel über die Determinante ist bekannt, dass wenn $u_i = u_j$ für $i \neq j$, dann ist $\det(u_1, \ldots, u_n) = 0$, da $\{u_1, \ldots, u_n\}$ linear abhängig ist. Somit ist Φ eine alternierende Multilinearform. Wir müssen noch zeigen, dass dass sie eindeutig ist.

   Es gilt die Formel

$$\dim \mathrm{Alt}^k(V, W) = \binom{\dim V}{k} \cdot \dim W,$$

   und in unserem Fall gilt $\dim V = n = k$ und $W = K$. Also ist

$$\dim \mathrm{Alt}^k(V, K) = 1.$$

   Es folgt, dass jede alternierende Multilinearform ein Vielfaches von Φ ist, und Φ ist die einzige alternierende Multilinearform mit $\Phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$.

6. Sei $\mathbf{Vek}_K$ die Kategorie aller Vektorräume über K.
   (a) Wir fixieren einen Vektorraum W. Sei

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}^k(\cdot, W)\colon \mathbf{Vek}_K &\to \mathbf{Vek}_K\\ V &\mapsto \mathrm{Alt}^k(V, W).\end{aligned}$$

   In Aufgabe 1 haben wir für jedes $T \in \mathrm{Hom}(V, V')$ eine Abbildung $\mathrm{Alt}^k(T, W) : \mathrm{Alt}^k(V', W) \to \mathrm{Alt}^k(V, W)$ definiert. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Alt}^k(\cdot, W)$ mit dieser Definition ein kontravarianter Funktor ist.

   Bemerkung: Zu zeigen ist bloss:
   - $\mathrm{Alt}^k(T \circ S, W) = \mathrm{Alt}^k(S, W) \circ \mathrm{Alt}^k(T, W)$
   - $\mathrm{Alt}^k(\mathrm{Id}_V, W) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Alt}^k(V,W)}$

   (b) Wir fixieren jetzt V und betrachten

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}^k(V, \cdot)\colon \mathbf{Vek}_K &\to \mathbf{Vek}_K\\ W &\mapsto \mathrm{Alt}^k(V, \cdot).\end{aligned}$$

   Definieren Sie $\mathrm{Alt}^k(V, S)$ für $S \in \mathrm{Hom}(W, W')$ mittels Aufgabe 1 und zeigen Sie, dass $\mathrm{Alt}^k(V, \cdot)$ ein kovarianter Funktor ist.

   (c) Formulieren und beweisen Sie ähnliche Aussagen für $\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_k; W)$ und $\mathrm{Sym}^k(V, W)$.

   (d) Sei $F\colon \mathbf{Vek}_K \to \mathbf{Vek}_K$ ein Funktor und sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass $F(T)$ auch ein Isomorphismus ist. Bemerken Sie, dass $F(T) \in \mathrm{Hom}(F(V), F(W))$, falls F kovariant ist, und $F(T) \in \mathrm{Hom}(F(W), F(V))$, falls F kontravariant ist, aber die Aussage in beiden Fällen gilt.

Lösung:

(a) Sei $\varphi \in \mathrm{Alt}^k(V'', W)$ und $S \in \mathrm{Hom}(V, V'), T \in \mathrm{Hom}(V', V'')$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}^k(T \circ S, W)(\varphi) &= \varphi \circ (T \circ S \times \ldots \times T \circ S)\\ &= \varphi \circ (T \times \ldots \times T) \circ (S \times \ldots \times S)\\ &= \mathrm{Alt}^k(S, W)(\varphi \circ (T \times \ldots \times T))\\ &= \mathrm{Alt}^k(S, W) \circ \mathrm{Alt}^k(T, W)(\varphi).\end{aligned}$$

Für $\varphi \in \mathrm{Alt}^k(V, W)$ sehen auch

$$\mathrm{Alt}^k(\mathrm{Id}_V, W)(\varphi) = \varphi \circ (\mathrm{Id}_V \times \ldots \times \mathrm{Id}_V) = \varphi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Alt}^k(V,W)}(\varphi).$$

Die Eigenschaft, dass für $T\colon V \to V'$ die Reihenfolge in

$$\mathrm{Alt}^k(T, W)\colon\ \mathrm{Alt}^k(V', W) \to \mathrm{Alt}^k(V, W)$$

umgekehrt wird, heisst, dass der Funktor kontravariant ist.

(b) Für $S \in \mathrm{Hom}(W, W')$ definieren wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(V, W) &\to \mathrm{Hom}(V, W')\\ \varphi &\mapsto S \circ \varphi\end{aligned}$$

Wir zeigen für $S \in \mathrm{Hom}(W, W')$ und $T \in \mathrm{Hom}(W', W'')$, dass für $\varphi \in \mathrm{Alt}^k(V, W)$ gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}^k(V, T \circ S)(\varphi) &= (T \circ S \times \ldots \times T \circ S) \circ \varphi\\ &= (T \times \ldots \times T) \circ (S \times \ldots \times S) \circ \varphi\\ &= (T \times \ldots \times T) \circ \mathrm{Alt}^k(V, S)(\varphi)\\ &= \mathrm{Alt}^k(V, T) \circ \mathrm{Alt}^k(V, S)(\varphi)\end{aligned}$$

und für $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,V)$:

$$\mathrm{Alt}^k(V, \mathrm{Id}_W)(\varphi) = (\mathrm{Id}_W \times \ldots \times \mathrm{Id}_W) \circ \varphi = \varphi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Alt}^k(V,W)}(\varphi).$$

Da die Morphismen die Richtung beibehalten, ist dies ein kovarianter Funktor.

(c) Die gleichen Definitionen und Beweise funktionieren hier.

(d) $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$ ist ein isomorphismus, genau dann wenn es ein $T^{-1} \in \mathrm{Hom}(W,V)$ mit $T \circ T^{-1} = \mathrm{Id}_W$ und $T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_V$ gibt.

Sei $F\colon Vek_K \to Vek_K$ ein Funktor. Dann sind $F(T)$ und $F(T^{-1})$ Homomorphismen. Wir behaupten, dass $F(T)^{-1} = F(T^{-1})$ gilt: Wir haben

$$F(T)(T^{-1}) = F(T \circ T^{-1}) = F(\mathrm{Id}_W) = \mathrm{Id}_{F(W)}$$

und

$$F(T^{-1}) \circ F(T) = F(T^{-1} \circ T) = F(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_{F(V)},$$

also ist $F(T^{-1})$ das Inverse von $F(T)$ und somit ist $F(T)$ ein Isomorphismus.