Serie 15

Tensorprodukt
Kein Abgabedatum

Hinweis: In dieser Serie sind U, V, V_1, V_2 und W endlichdimensionale K-Vektorräume, ausser wenn anders gekennzeichnet. Diese Serie behandelt den Stoff der letzten Vorlesungswoche. Diese Serie wird nicht mehr korrigiert und Sie können keine Punkte mehr holen.

1. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so, dass sie aus der kleinstmöglichsten Summe von reinen Tensoren bestehen.

(a) Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

(b) Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$.

$$-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) Es gilt wegen der Linearität im zweiten Argument:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

und somit kann der Ausrdruck als Summe von zwei reinen Tensoren geschrieben werden. Wir müssen noch zeigen, dass der Ausdruck nicht als reiner Tensor geschrieben werden kann:

Laut Beispiel 11.6.7 hat ein reiner Tensor die Form

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = (ae_1 + be_2) \otimes (ce_1 + de_2) = ace_1 \otimes e_1 + ade_1 \otimes e_2 + bce_2 \otimes e_1 + bde_2 \otimes e_2.$$

Wäre unser Ausdruck ein reiner Tensor, würde folgen, dass $ac = 1, ad = 1, bc = 0$ und $bd = 1$. Aber das ist nicht möglich, da weder b noch c gleich Null sein dürfen. (Wir haben verwendet, dass die reinen Tensoren einer Basis gleich der Basis des Tensorraums ist.)

(b) Wir drücken jeweils den ersten Faktor als Linearkombination der Standardbasisvektoren $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ aus, benutzen die Linearität des Tensorprodukts in der ersten Variablen, und fassen dann alle Terme mit demselben ersten Faktor zusammen unter Benutzung der Linearität des Tensorprodukts in der zweiten Variablen. Wir rechnen also

$$\begin{aligned}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} &= \left((-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \otimes \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-6\\2\\-4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\\
2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Für den gewünschten Ausdruck erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}-6\\2\\-4\end{pmatrix}\\
&+ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\\
&+ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}\\
&- \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\\
= \quad & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\
&+ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\left(\begin{pmatrix}-6\\2\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}\right)\\
= \quad & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Sei $\dim(V) = 2$ und $\{e_1, e_2\}$ eine Basis von V. Für $a, b, c, d \in K$ sei

$$v = a(e_1 \otimes e_1) + b(e_1 \otimes e_2) + c(e_2 \otimes e_1) + d(e_2 \otimes e_2).$$

Zeigen Sie, dass v ein reiner Tensor ist genau dann wenn $ad = bc$.

Lösung:

Wenn

$$v = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ein reiner Tensor ist, dann gilt

$$v = uxe_1 \otimes e_1 + uye_1 \otimes e_2 + vxe_2 \otimes e_1 + vye_2 \otimes e_2.$$

Es gilt

$$ad = uxvy = uyvx = bc.$$

Sei umgekehrt v mit $ad = bc$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $a = b = 0$: Dann ist

$$v = ce_2 \otimes e_1 + de_2 \otimes e_2 = e_2 \otimes (ce_1 + de_2)$$

ein purer Tensor.
Fall 2: $a = 0, b \neq 0$. Dann ist zwingend $c = 0$. Es gilt

$$v = be_1 \otimes e_2 + de_2 \otimes e_2 = (be_1 + de_2) \otimes e_2$$

ist ein reiner Tensor.
Fall 3: $a \neq 0$: Dann berechnen wir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d}{b} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ae_1 \otimes e_1 + be_1 \otimes e_2 + \frac{d}{b} ae_2 \otimes e_1 + \frac{d}{b} be_2 \otimes e_2 = v,$$

da $\frac{d}{b} a = \frac{bc}{b} = c$. Somit ist v ein reiner Tensor.

3. Laut der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts gibt es eine multilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \iota \colon V \times V &\to V \otimes V \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 \otimes v_2 \end{aligned}$$

so dass für jeden Vektorraum W und jede multilineare Abbildung $\varphi \colon V \times V \to W$ eine lineare Abbildung $\overline{\varphi} \colon V \otimes V \to W$ existiert mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \iota$.
Sei $W = V = K^n$ und

$$\begin{aligned} \varphi \colon V \times V &\to V \\ \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right) &\mapsto \begin{pmatrix} v_1 \cdot w_1 \\ \vdots \\ v_n \cdot w_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finden Sie $\overline{\varphi} \colon V \otimes V \to V$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \iota$ und überzeugen Sie sich, dass $\overline{\varphi}$ linear ist.

Lösung:
Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V. Dann ist $\{e_i \otimes e_j\}_{1 \le i,j \le n}$ eine Basis von $V \otimes V$.
Wir definieren die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} \colon V \otimes V &\to V \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_i \otimes e_j &\mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii} e_i \end{aligned}$$

und überprüfen

$$\overline{\varphi} \circ \iota \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right) = \overline{\varphi} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j e_i \otimes e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i e_i = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \varphi(e_i, e_j) = \varphi \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right),$$

da $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

4. Zeigen Sie:
   (a) Jedes Element in $V \otimes W$ lässt sich als Summe von $\min\{\dim V, \dim W\}$ reinen Tensoren schreiben.

(b) Seien V und W nicht mehr notwendigerweise endlichdimensional. Die Abbildung

$$V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W),$$
$$(f \otimes w) \mapsto (v \mapsto f(v)w)$$

ist ein injektiver Homomorphismus.

(c) Wenn V und W endlichdimensional sind, dann ist die Abbildung

$$V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W),$$
$$(f \otimes w) \mapsto (v \mapsto f(v)w)$$

ein Isomorphismus.

Lösung:

(a) Ohne Beachtung der Allgemeinheit sei $n := \dim(V) = \min\{\dim V, \dim W\}$. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V und $\{f_1, \ldots, f_k\}$ eine Basis von W. Jedes Element von $V \otimes W$ lässt sich als

$$t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(e_i \otimes f_j)$$

schreiben. Mit $w_i := \sum_{ij} a_{ij} f_j \in W$ ist

$$t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(e_i \otimes f_j) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij} f_j \right) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes w_i$$

eine Summe von n reinen Tensoren.

(b) Seien $\{f_i : i \in I\}$ und $\{w_j : j \in J\}$ Basen von $V^\star$ und W. Seien

$$t_1 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} f_i \otimes w_j, \qquad t_2 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} b_{ij} f_i \otimes w_j$$

allgemeine Elemente von $V^\star \otimes W$ und $\lambda \in K$. Wir bemerken, dass die Abbildung wohldefiniert ist, obwohl sie nur auf reinen Tensoren explizit angegeben wurde:

$$\varphi \colon V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W),$$
$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} f_i \otimes w_j \mapsto (v \mapsto \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} f_i(v) w_j)$$

Wir müssen als nächsts zeigen, dass die Abbildung linear ist. Sei $v \in V$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi\left(t_1 + \lambda t_2\right)(v) &= \varphi\left(\sum_{iI} \sum_{j \in J} (a_{ij} + \lambda b_{ij}) f_i \otimes w_j \right)(v) \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (a_{ij} + \lambda b_{ij}) f_i(v) w_j \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} f_i(v) w_j + \lambda \sum_{i \in I}^{n} \sum_{j \in J} b_{ij} f_i(v) w_j \\
&= \left(\varphi(t_1) + \lambda \varphi(t_2)\right)(v).
\end{aligned}$$

Für die Injektivität sei $t \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, das heisst

$$t = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} f_i \otimes w_j$$

mit $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} f_i(v) w_j = 0$ für alle $v \in V$. Das kann nur sein, wenn für alle i, j gilt $a_{ij} f_i(v) w_j = 0$ für alle $v \in V$. Das heisst für jedes Paar (i, j) muss gelten $a_{ij} = 0$, $f_i(v) = 0$ für alle $v \in V$ oder $w_j = 0$. Wir bemerken, dass $f_i = 0 \in V^\star$ äquivalent ist zu $f_i(v) = 0$ für alle $v \in V$. In allen drei Fällen gilt

$$a_{ij} f_i \otimes w_j = 0,$$

da $0 \cdot f_i \otimes w_j = a_{ij} 0 \otimes w_j = a_{ij} \cdot f_i \otimes 0 = 0$ (wegen Multilinearität von $(f_i, w_j) \mapsto f_i \otimes w_j$). Somit gilt

$$t = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} f_i \otimes w_j = 0$$

und wir haben gezeigt, dass $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Also ist φ injektiv.

(c) Wir müssen nur noch Surjektivität zeigen. Sei jetzt $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V mit dualer Basis $\mathcal{B}^\star = \{f_1 = v_1^\star, \ldots, f_n = v_n^\star\}$ (da V endlichdimensional, ist die Dimension von V und $V^\star$ gleich). Sei $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_k\}$ eine Basis von W. Jede lineare Abbildung $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ hat eine Darstellungsmatrix

$$A = [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

und wir definieren

$$t := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ji} f_i \otimes w_j \in V^\star \otimes W.$$

Für jedes $v = \sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell v_\ell$ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(t)(v) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ji} f_i(v) w_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ji} f_i\left(\sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell v_\ell\right) w_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ji} \sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell f_i(v_\ell)\, w_j \\
&\overset{f_i(v_\ell)=\delta_{i\ell}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ji} \beta_i w_j \\
&\overset{g(v_i)=\sum_{j=1}^{k} a_{ji} w_j}{=} \sum_{i=1}^{n} \beta_i g(v_i) \\
&= g\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\right) = g(v)
\end{aligned}$$

und somit gibt es für jedes $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ein $t \in V \otimes W$, so dass $(t) = g$. φ ist surjektiv.

5. Sei $S, T \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
   (a) Zeigen Sie, dass wenn $S = 0$ oder $T = 0$, dann auch $S \otimes T = 0 \in \mathrm{Hom}(V, W) \otimes \mathrm{Hom}(V, W)$.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Id}_V \otimes \mathrm{Id}_W = \mathrm{Id}_{V\otimes W}$.

Lösung:

(a) Wenn $S = 0$, dann gilt für alle $v_1, v_2 \in V$

$$(S \otimes T)(v_1 \otimes v_2) = S(v_1) \otimes T(v_2) = 0 \otimes T(v_2) = 0,$$

und da es eine Basis von $V \otimes V$ aus reinen Tensoren gibt, folgt, dass $S \otimes T = 0$ ist.

Wenn $T = 0$, dann gilt für alle $v_1, v_2 \in V$

$$(S \otimes T)(v_1 \otimes v_2) = S(v_1) \otimes T(v_2) = S(v_1) \otimes 0 = 0,$$

und da es eine Basis von $V \otimes V$ aus reinen Tensoren gibt, folgt, dass $S \otimes T = 0$ ist.

(b) Wir berechnen für $v_1, v_2 \in V$

$$(\mathrm{Id}_V \otimes \mathrm{Id}_V)(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2$$

und da es eine Basis von $V \otimes V$ aus reinen Tensoren gibt, folgt, die Aussage.

6. Zeigen Sie, dass der freie Vektorraum über einer Menge S eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus ist (Siehe Übung 11.8.2 im Skript).

Lösung:

Seien (E, b) und (F, c) mit $b\colon S \to E$ und $c\colon S \to F$ zwei freie Vektorräume über S. Das heisst sie erfüllen die universelle Eigenschaft, dass für jeden K-Vektorraum W und jede Funktion $\varphi\colon S \to W$ eine eindeutige lineare Abbildung $\overline{\varphi}_E\colon E \to W$ (oder $\overline{\varphi}_F\colon F \to W$) mit $\overline{\varphi}_E \circ b = \varphi$ (oder $\overline{\varphi}_F \circ c = \varphi$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "b"'] & & W \\ & E \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}_E"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "c"'] & & W \\ & F \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}_F"'] & \end{tikzcd}$$

Für (E, b) wählen wir $W = F$ und $\varphi = c$. Dann bekommen wir eine eindeutige lineare Abbildung $\overline{\varphi}_E = \overline{c}\colon E \to F$ mit $\overline{c} \circ b = c$. Analog bekommmen wir für (F, c), $W = E$ und $\varphi = b\colon S \to E$ eine eindeutige lineare Abbildung $\overline{\varphi}_c = \overline{b}\colon F \to E$ mit $\overline{b} \circ c = b$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "c"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "b"] & & F \\ F \arrow[r, dotted, "\overline{b}"] & E \arrow[ur, dotted, "\overline{c}"] & \end{tikzcd}$$

Jetzt können wir die universelle Eigenschaft erneut (für (F, c)) anwenden mit $\varphi = c$ und $W = F$. Dann bekommen wir eine eindeutige Lineare Abbildung $\overline{\varphi}_F\colon F \to F$ mit $\overline{\varphi}_F \circ c = c$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "c"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "b"] & & F \\ F \arrow[r, dotted, "\overline{b}"] \arrow[urr, dotted, bend right=60, "\overline{\varphi}_F"'] & E \arrow[ur, dotted, "\overline{c}"] & \end{tikzcd}$$

Wir kennen bereits zwei solche Abbildungen, zuerst $\overline{\varphi}_F = \mathrm{Id}_F$. Eine weitere solche Abbildung ist durch $\overline{c} \circ \overline{b}\colon F \to F$ gegeben: Bemerke, dass $\overline{c} \circ b = c$ und $\overline{b} \circ c = b$. Somit folgt $(\overline{c} \circ \overline{b}) \circ c = c$. Wegen der Eindeutigkeit wissen wir, dass $\overline{c} \circ \overline{b} = \mathrm{Id}_F$.

Analog zeigt man, dass $\overline{b} \circ \overline{c} = \mathrm{Id}_E$. Somit sind $\overline{c}$ und $\overline{b}$ inverse voneinander und $\overline{c}\colon E \to F$ ist ein Isomorphismus. Dieser ist eindeutig.

7. Seien U und V zwei K-Vektorräume. Ein Tripel (D, π_U, π_V) heisst eine *externe direkte Summe von U und V*, wenn folgendes gilt:

   - D ist ein K-Vektorraum.
   - $\pi_U : D \to U$ und $\pi_V : D \to V$ sind lineare Abbildungen.
   - (D, π_U, π_V) hat die folgende universelle Eigenschaft: Falls (W, f_U, f_V) ein Tripel ist, wobei W ein K-Vektorraum ist und $f_U : W \to U$ und $f_V : W \to V$ lineare Abbildungen sind, dann existiert eine *eindeutige* lineare Abbildung $\varphi : W \to D$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "f_U"'] \arrow[d, dotted, "\varphi"] \arrow[dr, "f_V"] & \\ U & D \arrow[l, "\pi_U"] \arrow[r, "\pi_V"'] & V \end{tikzcd}$$

   (a) Zeigen Sie, dass
   $$U \times V = \{(u, v) \mid u \in U,\ v \in V\},$$
   mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation, und $\pi_U(u, v) = u$, $\pi_V(u, v) = v$, die obige universelle Eigenschaft hat.

   (b) Zeigen Sie, dass eine externe direkte Summe eindeutig ist bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

   (c) Finden Sie einen Unterraum $S \subseteq F_K(U \times V)$, sodass $F_K(U \times V)/S$ (zusammen mit der richtigen Wahl von π_U und π_V) eine externe direkte Summe von U und V ist.

Lösung:

(a) Die ersten zwei Punkte sind klar. Wir zeigen die universelle Eigenschaft: Sei W ein K-Vektorraum und $f_U : W \to U$ und $f_V : W \to V$ lineare Abbildungen. Wir definieren

$$\begin{aligned} \varphi \colon W &\to V \times W \\ w &\mapsto (f_U(w), f_V(w)) \end{aligned}$$

und zeigen für alle $w \in W$

$$\pi_U \circ \varphi(w) = \pi_U(f_U(w), f_V(w)) = f_U(w)$$

und

$$\pi_V \circ \varphi(w) = \pi_V(f_U(w), f_V(w)) = f_V(w).$$

Wir müssen noch zeigen, dass φ eindeutig ist. Sei $\tilde{\varphi} \colon W \to U \times V$ eine weitere lineare Abbildung mit $\pi_U \circ \tilde{\varphi} = f_U$ und $\pi_V \circ \tilde{\varphi} = f_V$. Für $w \in W$ betrachten wir $(u, v) := (\varphi - \tilde{\varphi})(w)$. Es gilt $u = \pi_U(u, v) = \pi_U \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi})(w) = (\pi_U \circ \varphi(w) - \pi_U \circ \tilde{\varphi}(w) = f_U(w) - f_U(w) = 0$ und analog $v = 0$. Also ist $(u, v) = 0 \in V \times W$ und somit $\varphi - \tilde{\varphi} = 0$, also $\varphi = \tilde{\varphi}$.

(b) Seien (D, π_U^D, π_V^D) und (E, π_U^E, π_V^E) zwei externe direkte Summen. Wir betrachten das Diagram

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "\pi_U^D"'] \arrow[dr, "\pi_V^D"] & \\ U & E \arrow[l, "\pi_U^E"] \arrow[r, "\pi_V^E"'] & V \\ & D \arrow[ul, "\pi_U^D"] \arrow[ur, "\pi_V^D"'] & \end{tikzcd}$$

und verwenden die universelle Eigenschaft drei mal: Wir bekommen eine eindeutige Abbildung φ^E aus der universellen Eigenschaft für (E, π_U^E, π_V^E) für $W = D$ und $f_U = \pi_U^D, f_V = \pi_V^D$. Wir bekommen ebenfalls eine eindeutige Abbildung φ^D aus der universellen Eigenschaft für (D, π_U^D, π_V^D) für $W = E$ und $f_U = \pi_U^E, f_V = \pi_V^E$. Diese Abbildungen sind so dass das Diagram

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "\pi_U^D"'] \arrow[d, dotted, "\varphi_E"] \arrow[dr, "\pi_V^D"] & \\
U & E \arrow[l, "\pi_U^E"] \arrow[r, "\pi_V^E"'] \arrow[d, dotted, "\varphi_D"] & V \\
 & D \arrow[ul, "\pi_U^D"] \arrow[ur, "\pi_V^D"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Zuletzt bekommen wir eine eindeutige Abbildung $\varphi\colon D \to D$ (aus der universellen Eigenschaft für (D, π_U^D, π_V^D) für $W = D$ und $f_U = \pi_U^D, f_V = \pi_V^D$). Wegen der Eindeutigkeit und kommutativität des Diagrams haben wir $\varphi_D \circ \varphi_E = \varphi = \mathrm{Id}_D$. Analog bekommen wir $\varphi_E \circ \varphi_D = \mathrm{Id}_E$. Somit sind φ_E und φ_D Inverse voneinander und wir haben einen eindeutigen Isomorphismus $\varphi_D\colon E \to D$ zwischen den beiden externen direkten Summen.

(c) Wir betrachten die lineare Abbildung $= \mathrm{Id}_{U\times V}$. Die universelle Eigenschaft von des freien Vektorraums $(F_K(U\times V), b)$ über $U\times V$ besagt, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon F_K(U\times V) \to U \times V$ gibt, so dass $\overline{\varphi} \circ b = \mathrm{Id}_{U\times V}$.

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{U\times V}"] \arrow[dr, "b"'] & & U \times V \\
 & F_K(U \times V) \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Wir definieren $S := \mathrm{Ker}(\overline{\varphi})$ und wissen aus einem Satz der Linearen Algebra I, dass

$$F_K(U \times V)/S \cong \mathrm{Bild}(\overline{\varphi}).$$

Da $U \times V = \mathrm{Bild}(\mathrm{Id}_{U\times V}) = \mathrm{Bild}(\overline{\varphi} \circ b) \subseteq \mathrm{Bild}(\overline{\varphi}) \subseteq U \times V$, haben wir einen Isomorphismus

$$\psi\colon F_K(U \times V)/S \ \stackrel{\sim}{\to}\ \mathrm{Bild}(\overline{\varphi}) = U \times V.$$

und wir können $\pi_U\colon F_K(U \times V) \to U$ und $\pi_V K(U \times V) \to V$ durch $\pi_U = \pi_U^{U\times V} \circ \psi^{-1}$ und $\pi_U = \pi_V^{U\times V} \circ \psi^{-1}$ definieren. Wir zeigen, dass $(F_K(U \times V), \pi_U, \pi_V)$ die universelle Eigenschaft für externe direkte Produkte erfüllt: Sei W ein K-Vektorraum und $f_U\colon W \to U, f_V\colon W \to V$ lineare Abbildungen. Dann bekommen wir aus der universellen Eigenschaft von $(U \times V, \pi_U^{U\times V}, \pi_V^{U\times V})$ eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi\colon W \to U \times V$, so dass das Diagram

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "f_U"'] \arrow[d, dotted, "\varphi"] \arrow[dr, "f_V"] & \\
U & U \times V \arrow[l, "\pi_U^{U\times V}"] \arrow[r, "\pi_V^{U\times V}"'] \arrow[d, "\psi"] & V \\
 & F_K(U \times V)/S \arrow[ul, "\pi_U"] \arrow[ur, "\pi_V"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Die lineare Abbildung $\psi\colon \varphi\colon W \to F_K(UV)/S$ kommutiert mit dem Diagram. Wir müssen noch zeigen, dass sie eindeutig ist. Sei $\chi\colon W \to F_K(UV)/S$ ebenfalls eine Abbildung, so dass das Diagram kommutiert, dann kommutiert das Diagram auch mit $\varphi' := \psi^{-1} \circ \chi\colon W \to U \times V$, aber wegen der Eindeutigkeit von φ muss gelten $\varphi = \varphi'$. Also haben wir $\chi = \psi \circ \varphi' = \psi \circ \varphi$. Somit ist die lineare Abbildung $\psi\colon \varphi\colon W \to F_K(UV)/S$ die eindeutige lineare Abbildung, die $(F_K(U \times V), \pi_U, \pi_V)$ zu einer externen direkten Summe von U und V macht.

8. Seien α, β, γ Vektoren in einem K-Vektorraum. Vereinfache die Ausdrücke
   (a) $(\alpha - \beta) \wedge (\alpha + \beta)$
   (b) $(\alpha - \beta) \wedge (\beta - \gamma) \wedge (\gamma - \alpha)$
   (c) $(\beta - \alpha) \wedge (\gamma - \alpha) + (\alpha + \gamma) \wedge \gamma - \beta \wedge \gamma$.

Lösung:
Wir machen zuerst einige Bemerkungen: Das alternierende Produkt erfüllt $\alpha \wedge \alpha$ für alle $\alpha \in \bigwedge^k V$ (wegen der Definition von alternierend).
Ausserdem haben wir

$$0 = (\alpha + \beta) \wedge (\alpha + \beta) = \alpha \wedge \alpha + \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha + \beta \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha$$

und somit

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha.$$

(a)

$$(\alpha - \beta) \wedge (\alpha + \beta) = \alpha \wedge \alpha + \alpha \wedge \beta - \beta \wedge \alpha - \beta \wedge \beta = 2\alpha \wedge \beta.$$

(b)

$$\begin{aligned}
(\alpha - \beta) \wedge (\beta - \gamma) \wedge (\gamma - \alpha) &= (\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma) \wedge (\gamma - \alpha) \\
&= \alpha \wedge \beta \wedge \gamma - 0 + 0 - 0 - 0 - \beta \wedge \gamma \wedge \alpha \\
&= \alpha \wedge \beta \wedge \gamma + \beta \wedge \alpha \wedge \gamma \\
&= \alpha \wedge \beta \wedge \gamma - \alpha \wedge \beta \wedge \gamma = 0
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
(\beta - \alpha) \wedge (\gamma - \alpha) + (\alpha + \gamma) \wedge \gamma - \beta \wedge \gamma &= \beta \wedge \gamma - \beta \wedge \alpha - \alpha \wedge \gamma + 0 + \alpha \wedge \gamma + 0 - \beta \wedge \gamma \\
&= -\beta \wedge \alpha = \alpha \wedge \beta.
\end{aligned}$$

9. Seien $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum V. Zeigen Sie

$$\mathrm{Sp}(v_1, \ldots, v_k) = \{x \in V : v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge x = 0\}.$$

Lösung:
Sei $x \in \mathrm{Sp}(v_1, \ldots, v_k)$, das heisst

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i v_i.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge x &= \sum_{i=1}^{k} v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge x_i v_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge (v_i \wedge (-1)^{k-i} v_i) \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_k \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge 0 \wedge \ldots \wedge v_k = 0.
\end{aligned}$$

Andererseits sei $x \in V$ so, dass $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge x = 0$. Wir können die linear unabhängigen Vektoren zu einer Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ erweitern. Dann ist

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

Wir folgern

$$\begin{aligned} 0 &= v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge x \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge v_i \\ &= \sum_{i=k+1}^{n} x_i v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge v_i \end{aligned}$$

und da die Elemente $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge v_i \in \bigwedge^{k+1} V$ eine Teilmenge einer Basis von $\bigwedge^{k+1} V$ sind muss somit $x_i = 0$ für alle $i \geq k+1$ gelten. Wir folgern, dass $x \in \mathrm{Sp}(v_1, \ldots, v_k)$.