Serie 2

Eigenwerte
Abgabe 8.3.2021

Hinweis: Punkte können Sie in den Aufgaben 3(c), 6(b) und 7(a) bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, einen grossen Teil der Serie zu lösen. In Aufgabe 6 können Sie einige Teilaufgaben für das spätere Üben aufbewahren. Die Aufgabe 7(b) ist etwas schwieriger und mit einem ($\star$) markiert.

1. Wie in Serie 1, Aufgabe 1, betrachten Sie die folgenden Matrizen in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \text{für } \varphi \in (0, 2\pi)$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom für die drei Matrizen.

(b) Berechnen Sie die Nullstellen der charakteristischen Polynome über $\mathbb{R}$.

(c) Zu jeder Nullstelle λ, berechnen Sie $\mathrm{Eig}_T(\lambda)$ für $T \in \{A, B, C\}$.

(d) Sind die Matrizen über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? Sind die Matrizen über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

(e) Vergleichen Sie die Resultate mit der Lösung von Serie 1, Aufgabe 1.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - xI_2) = (2-x)\left(\frac{1}{2} - x\right) = x^2 - \frac{5}{2}x + 1, \\ p_B(x) &= x^2, \\ p_C(x) &= (\cos(\varphi) - x)^2 + \sin(\varphi)^2 = x^2 - 2\cos(\varphi)x + 1. \end{aligned}$$

(b) Es gilt $(\lambda_A)_1 = 2, (\lambda_A)_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_B = 0$ und

$$\lambda_C = \frac{2\cos(\varphi) \pm \sqrt{4\cos(\varphi)^2 - 4}}{2} = \cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi) = e^{\pm i\varphi}$$

Also hat p_C keine Nullstellen in $\mathbb{R}$, ausser wenn $\sin(\varphi) = 0$, also bei $\varphi = \pi$. Dann ist die Nullstelle $\lambda_C = -1$.

(c) Die Eigenräume $\mathrm{Eig}_T(\lambda) = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$ sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}_A(2) &= \mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ \mathrm{Eig}_A\left(\frac{1}{2}\right) &= \mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\ \mathrm{Eig}_B(0) &= \mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ \mathrm{Eig}_C(-1) &= \mathbb{R}^2 \qquad \text{für } \varphi = \pi. \end{aligned}$$

Wenn man C als Matrix in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ auffasst, dann sind die Eigenräume gerade

$$\mathrm{Eig}_C(e^{i\varphi}) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -ia \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}$$
$$\mathrm{Eig}_C(e^{-i\varphi}) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ ia \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}.$$

(d) Eine Matrix ist diagonalisierbar genau dann wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und die algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmt.

Die Matrix A ist bereits diagonal, also definitiv diagonalisierbar (über $\mathbb{R}$, also auch über $\mathbb{C}$).

Bei der Matrix B zerfällt p_B in Linearfaktoren und $\lambda_B = 0$ hat algebraische Vielfachheit 2. Die geometrische Vielfachheit $\dim \mathrm{Eig}_B(\lambda_B) = 1$ ist jedoch nicht gleich gross und somit kann B nicht diagonalisiert werden. Weder über $\mathbb{R}$ noch über $\mathbb{C}$.

Bei der Matrix C haben wir für $\varphi = \pi$ greade $p_B(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, also den Eigenwerte $\lambda_C = -1$ mit algebraischer Vielfachheit 2. Auch die geometrische Vielfachheit $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ ist 2 und somit ist C diagonalisierbar für $\varphi = \pi$ (über $\mathbb{R}$, also auch über $\mathbb{C}$). Wenn hingegen $\varphi \neq \pi$, dann zerfällt p_C nicht in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$. Über $\mathbb{C}$ hingegen ist $p_C(x) = \left(x - e^{i\varphi}\right)\left(x - e^{-i\varphi}\right)$ und die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sind jeweils 1. Somit ist C diagonalisierbar über $\mathbb{C}$.

(e) In Serie 1, Aufgabe 1 wurden die Eigenwerte und Eigenvektoren direkt berechnet, wobei nicht immer klar war, warum man was macht. Mit dem charakteristischen Polynom ist die Vorgehensweise klar und zum Beispiel für die Rotationsmatrix einfacher.

2. Sei $\mathbb{R}[x]_3$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 3 und sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}[x]_3 &\to \mathbb{R}[x]_3 \\ p &\mapsto p(a) + p'(a)(x-a), \end{aligned}$$

wobei p' die Ableitung des Polynoms p ist.

(a) Begründen Sie, dass φ linear ist.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von φ bezüglich der Basis $E_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$.

(c) Bestimmen Sie eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}[x]_3$, bezüglich der die Darstellungsmatrix von φ Diagonalgestalt hat.

Lösung:

(a) Die Linearität von φ folgt aus der Linearität der Ableitung: Sei $p, q \in \mathbb{R}[x]_3$. Wir haben

$$\varphi(p+q)(x) = (p+q)(x) + (p+q)'(a)(x-a) = p(x) + q(x) + p'(a)(x-a) + q'(a)(x-a) = \varphi(p)(x) + \varphi(q)(x)$$

und sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\varphi(\lambda p)(x) = \lambda p(x) + \lambda p'(a)(x-a) = \lambda\varphi(p)(x).$$

(b) Wir wenden φ auf die Basisvektoren an und bekommen

$$[\varphi]_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^2 & -2a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$p_\varphi(x) = p_{[\varphi]_{E_3}}(x) = (1-x)(1-x)x^2$$

mit den Eigenwerten 1 und 0. Die Eigenräume sind

$$\begin{aligned}\mathrm{Eig}_\varphi(1) &= \mathrm{Sp}\left\{1, x\right\},\\ \mathrm{Eig}_\varphi(0) &= \mathrm{Sp}\left\{a^2 - 2ax + x^2, 2a^3 - 3a^2x + x^3\right\},\end{aligned}$$

was uns zur geordneten Basis

$$\mathcal{B} = \left\{1, x, a^2 - 2ax + x^2, 2a^3 - 3a^2x + x^3\right\}$$

leitet. Wir können überprüfen, dass die Darstellungsmatrix von φ durch

$$[\varphi]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

gegeben ist, was wir durch einsetzen der Basisvektoren in φ herausfinden können.

3. Sei die Matrix $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$ definiert als

$$A = \begin{pmatrix}-2 & -1 & -5 & 1\\ -8 & 1 & -12 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 1\\ -6 & 1 & -8 & 0\end{pmatrix}.$$

(a) Betrachten Sie A über dem Körper $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte, sowie die zugehörigen Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar?

(b) Lösen Sie Teilaufgabe (a) über dem Körper $\mathbb{F}_5$.

(c) Berechnen Sie A^{2021} über $\mathbb{F}_5$. (2)

Lösung:

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom von A durch Entwicklung nach der letzten Spalte und erhalten

$$p_A(x) = \det(A - x \cdot I_4) = (x-1)(x+1)x(x-2).$$

Alternativ kann zunächst das Gauß Verfahren verwendet werden, um die Matrix zu vereinfachen. Die Eigenwerte (=Nullstellen des char. Polynoms) sind somit $1, -1, 0, 2$. Für einen Eigenwert λ erhalten wir den zugehörigen Eigenraum $\mathrm{Eig}_A(\lambda)$ als

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I_4).$$

Mittels Gauß Verfahrens finden wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Eig}_A(\ \ 1) &= \mathrm{Sp}\left\{(0,1,0,1)\right\},\\ \mathrm{Eig}_A(-1) &= \mathrm{Sp}\left\{(3,6,-1,4)\right\},\\ \mathrm{Eig}_A(\ \ 0) &= \mathrm{Sp}\left\{(2,4,-1,3)\right\}\\ \mathrm{Eig}_A(\ \ 2) &= \mathrm{Sp}\left\{(1,4,-1,3)\right\}.\end{aligned}$$

Die Matrix A ist somit diagonalisierbar. Wir definieren

$$C = \begin{pmatrix}0 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 6 & 4 & 4\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 3 & 3\end{pmatrix},$$

die Basiswechselmatrix von der Basis gegeben durch die Eigenvektoren von A zur Standardbasis. Dann gilt

$$A = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} C^{-1} .$$

Die Inverse zu C berechnet sich leicht als

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

(b) Die Rechnung in Teilaufgabe (a) ist analog gültig über dem Körper $\mathbb{F}_5$.

(c) Die Elemente des Körpers $\mathbb{F}_5$ werden streng genommen mit einem Strich (z.B. $\bar{2}$) notiert. Wir verzichten hier auf die Striche. Wir berechnen A^{2021} als

$$\begin{aligned} A^{2021} &= C \cdot \mathrm{Diag}(1, -1, 0, 2)^{2021} \cdot C^{-1} \\ &= C \cdot \mathrm{Diag}(1, -1, 0, 2^{2021}) \cdot C^{-1} . \end{aligned}$$

Die Potenz 2^{2021} lässt sich über $\mathbb{F}_5$ mit folgendem Trick berechnen. Für jede Primzahl p gilt nach kleinem Fermat:

$$a^{p-1} = 1 \mod p, \text{ für alle } a \in \mathbb{F}_p .$$

Für $a = 2$ und $p = 5$ lässt sich natürlich auch direkt sehen, dass $2^4 = 1 \mod 5$. Also folgt

$$2^{2021} = 2^{4 \cdot 505} \cdot 2 = 1^{505} \cdot 2 = 2 \mod 5 .$$

Da $\mathrm{Diag}(1, -1, 0, 2)^{2021} = \mathrm{Diag}(1, -1, 0, 2) \mod 5$, folgt dass auch $A^{2021} = A$ in $\mathbb{F}_5$.

Definition. *Ein Endomorphismus $T \in \mathrm{End}(V)$ heisst* als obere/untere Dreiecksmatrix triangularisierbar*, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $[T]_\mathcal{B}$ eine obere/untere Dreiecksmatrix ist.*

4. Beweisen Sie, dass $T \in \mathrm{End}(V)$ als obere Dreiecksmatrix triangularisiert werden kann, genau dann wenn T als untere Dreiecksmatrix triangularisiert werden kann.

Lösung:

Sei $\mathcal{B}$ eine Basis, in der die Darstellungsmatrix von T eine obere Dreiecksmatrix ist. Wir betrachten die lineare Abbildung C mit Basiswechselsmatrix

$$[C]_\mathcal{B} = [C]_\mathcal{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$[T]_{C(\mathcal{B})} = [C]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}[C]_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} & & * \\ & \iddots & \\ * & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & * \\ & \iddots & \\ * & & \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} & & * \\ & \iddots & \\ * & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \iddots & \\ * & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & & \\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Also ist die Darstellungsmatrix von T bezüglich der Basis $C(\mathcal{B})$ eine untere Dreiecksmatrix.

5. (a) Finden Sie einen Vektorraum V und Untervektorräume U_1, U_2, U_3, so dass

$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}, \quad V = U_1 + U_2 + U_3 \quad \text{aber} \quad V \neq U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden drei Bedingungen äquivalent sind:

(1) $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$.

(2) $V = W_1 + \ldots + W_k$ und $W_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k W_j = \{0\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

(3) $V = W_1 + \ldots + W_k$ und $W_i \cap (W_{i+1} + \ldots + W_k) = \{0\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

(c) Sei

$$U = \left\{(x, y, x+y, x-y, 2x) \in K^5 \colon x, y \in K\right\},$$

finde drei Unterräume W_1, W_2, W_3 von K^5, die nicht $\{0\}$ sind, so dass $K^5 = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

Lösung:

(a) Sei $\{e_1, e_2, e_3\}$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^3$. Wir definieren eine Ebene $U_1 = \mathrm{Sp}\{e_1, e_2\}$ und die zwei Linien $U_2 = \mathrm{Sp}\{e_1 + e_3\}$ und $U_3 = \mathrm{Sp}\{e_2 + e_3\}$. $U_1 + U_2 + U_3$ ist keine direkte Summe, da zum Beispiel der Vektor $e_1 - e_2$ als Element von U_1 oder als Summe $e_1 + e_3 - (e_2 + e_3) \in U_2 + U_3$ geschieben werden kann. In einer direkten Summe muss die Summe jedoch eindeutig sein.

(b) (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$. Es ist klar, dass $V = W_1 + \ldots + W_k$ gilt. Sei jetzt $v \in W_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k W_j$ für ein $i \in \{1, \ldots, k\}$. Wir können v auf zwei Arten darstellen, nämlich

$$v = v + 0 \in W_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k W_j$$
$$v = 0 + v \in W_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k W_j$$

Da V ein direktes Produkt ist, ist die Darstellung eindeutig, also muss $v = 0$ gelten. Wir haben (2) gezeigt.

(2) $\Rightarrow$ (3): Bemerke, dass für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und Unterräume $A, B \subseteq V$ gilt

$$W_i \cap A + W_i \cap B \subseteq W_i \cap (A + B)$$

Wir setzen $A = W_1 + \ldots + W_{i-1}$ und $B = W_{i+1} + \ldots + W_k$. Nach (2) gilt $W_i \cap (A+B) = \{0\}$ und somit

$$W_i \cap A + W_i \cap B = \{0\},$$

also auch $W_i \cap B = W_i \cap (W_{i+1} + \ldots + W_k) = \{0\}$, also gilt (3).

(3) $\Rightarrow$ (1): Seien $v = v_1 + \ldots + v_k = v_1' + \ldots + v_k' \in W_1 + \ldots W_k$ zwei Darstellungen von $v \in V$ mit $v_i, v_i' \in W_i$. Wir müssen zeigen, dass $v_i = v_i'$ für alle i.

Wir machen eine Induktion über i. Für $i = 1$ haben wir

$$v_1 - v_1' = -(v_2 + \ldots v_k - v_2' - \ldots - v_k') \in W_1 \cap (W_2 + \ldots + W_k) \overset{(3)}{=} \{0\},$$

also $v_1 = v_1'$.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $v_1 = v_1', \ldots, v_{i-1} = v_{i-1}'$. Die Aussage folgt aus

$$v_i - v_i' = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} -(v_j - v_j') \overset{\text{IA}}{=} \sum_{j=i+1}^{k} -(v_j - v_j') \in W_i \cap (W_{i+1} + \ldots + W_k) \overset{(3)}{=} \{0\}.$$

(c) Wir bemerken, dass

$$U = \operatorname{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und erweitern auf eine Basis, zum Beispiel durch

$$W_1 = \operatorname{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W_2 = \operatorname{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W_3 = \operatorname{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da die Darstellung in einer Basis eindeutig ist, ist auch die Darstellung als Summe von Unterräumen eindeutig. Somit handelt es sich um eine direkte Summe.

6. Im Folgenden sind Zahlenfolgen $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{Z}$ rekursiv definiert. Finden Sie eine Formel für a_n in Abhängigkeit von $n \geq 3$.
   (a) $a_1 = 0, a_2 = 2, a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 2$.
   (b) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 7, a_{n+1} = -2a_n + a_{n-1} + 2a_{n-2}$ für $n \geq 3$. (2)
   (c) $a_1 = 1, a_2 = 6, a_3 = 8, a_{n+1} = 6a_n - 11a_{n-1} + 6a_{n-2}$ für $n \geq 3$.
   (d) $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 5, a_{n+1} = 7a_n - 14a_{n-1} + 8a_{n-2}$ für $n \geq 3$.

Lösung:

(a) Wir schreiben die rekursive Definition mit Hilfe einer Matrixgleichung auf. Damit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 2.$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 2.$$

Wir wollen also die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisieren, um die Matrixpotenz A^{n-2} zu berechnen. Wir berechnen die Eigenwerte von A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-2) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1.$$

Die Nullstellen von p_A sind also bei

$$\lambda_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Damit sind die Eigenwerte von A gegeben durch $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$ und $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$. Wir berechnen nun die zugehörigen Eigenvektoren. Wir beginnen mit dem Eigenvektor zum Eigenwert λ_1:

$$\ker \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ -1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Damit ist $v_1 = (1+\sqrt{2}, 1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$. Nun berechnen wir den Eigenvektor zum Eigenwert λ_2:

$$\ker \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Damit ist $v_2 = (1-\sqrt{2}, 1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$. Wir schliessen, dass $A = PDP^{-1}$, mit

$$P = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Nun folgt, dass

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = PD^{n-2}P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 2.$$

Wir benutzen Gauss, um $Px = (2,0)^\top$ zu lösen (i.e. $P^{-1}(2,0)^\top$ zu finden)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 - (1+\sqrt{2})L_2 \to L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2\sqrt{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Also gilt für $P^{-1}(2,0)^\top = (x_1, x_2)$, dass

$$-2\sqrt{2}x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also gilt

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ausserdem berechnen wir

$$\begin{aligned} PD^{n-2} &= \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^{n-2} & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^{n-1} & (1-\sqrt{2})^{n-1} \\ (1+\sqrt{2})^{n-2} & (1-\sqrt{2})^{n-2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= PD^{n-2}P^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^{n-1} & (1-\sqrt{2})^{n-1} \\ (1+\sqrt{2})^{n-2} & (1-\sqrt{2})^{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1} \\ (1+\sqrt{2})^{n-2} - (1-\sqrt{2})^{n-2} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

für $n \geq 2$. Also gilt

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}, \qquad n \geq 1.$$

(b) Wir schreiben die rekursive Definition mit Hilfe einer Matrixgleichung auf. Damit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 3.$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-3}\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-3}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 3.$$

Wir wollen also die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisieren, um die Matrixpotenz A^{n-3} zu berechnen. Wir berechnen die Eigenwerte von A:

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda+2) - 2 - \lambda = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2.$$

Wir erraten, dass $\lambda = 1$ eine Nullstelle von p_A ist. Nun benutzen wir Polynomdivision und berechnen

$$(\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2)/(\lambda - 1) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

Es gilt also

$$p_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+3\lambda+2) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)$$

und damit sind die Eigenwerte von A gegeben durch $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = -2$. Wir berechnen nun die zugehörigen Eigenvektoren. Wir beginnen mit dem Eigenvektor zum Eigenwert λ_1:

$$\ker\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} : \in \mathbb{R}\right\}.$$

Damit ist $v_1 = (1,1,1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Nun berechnen wir den Eigenvektor zum Eigenwert λ_2:

$$\ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Damit ist $v_2 = (1,-1,1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Zu Letzt berechnen wir den Eigenvektor zum Eigenwert λ_3:

$$\ker\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 4t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Damit ist $v_3 = (4, -2, 1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = -2$. Wir schliessen, dass $A = PDP^{-1}$, mit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nun folgt, dass

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-3} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = PD^{n-3}P^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 3.$$

Wir benutzen Gauss, um $Px = (7, 3, 2)^\top$ zu lösen (i.e. $P^{-1}(7, 3, 2)^\top$ zu finden)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 - L_1 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right).$$

Also gilt für $P^{-1}(7, 3, 2)^\top = (x_1, x_2, x_3)$, dass

$$\begin{aligned} -3x_3 = -5 &\Rightarrow x_3 = \frac{5}{3}, \\ -2x_2 - 6x_3 = -4 &\Rightarrow 2x_2 = 4 - 6x_3 = -6 \Rightarrow x_2 = -3, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 &\Rightarrow x_1 = 7 - x_2 - 4x_3 = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ausserdem berechnen wir

$$\begin{aligned} PD^{n-3} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n-3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{n-3} & (-2)^{n-1} \\ 1 & (-1)^{n-2} & (-2)^{n-2} \\ 1 & (-1)^{n-3} & (-2)^{n-3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = PD^{n-3}P^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{n-3} & (-2)^{n-1} \\ 1 & (-1)^{n-2} & (-2)^{n-2} \\ 1 & (-1)^{n-3} & (-2)^{n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 - 9(-1)^{n-1} + 5(-2)^{n-1} \\ 10 - 9(-1)^{n-2} + 5(-2)^{n-2} \\ 10 - 9(-1)^{n-3} + 5(-2)^{n-3} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

für $n \geq 3$. Also gilt

$$a_n = \frac{10 - 9(-1)^{n-1} + 5(-2)^{n-1}}{3}, \qquad n \geq 1.$$

(c) Wir schreiben die rekursive Definition mit Hilfe einer Matrixgleichung auf. Damit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 3.$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-3} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-3} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 3.$$

Wir wollen also die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisieren, um die Matrixpotenz A^{n-3} zu berechnen. Wie oben sehen wir, dass $A = PDP^{-1}$, mit

$$P = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun folgt, dass

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-3} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = PD^{n-3}P^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 3.$$

Wir benutzen Gauss, um $Px = (8,6,1)^\top$ zu lösen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - 3L_3 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 - 9L_3 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 - 5L_2 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & -16 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Also gilt für $P^{-1}(8,6,1)^\top = (x_1, x_2, x_3)$, dass

$$\begin{aligned} 2x_3 &= -16 \Rightarrow x_3 = -8, \\ -x_2 - 2x_3 &= 3 \Rightarrow x_2 = -3 - 2x_3 = 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \Rightarrow x_1 = 1 - x_2 - x_3 = -4. \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Ausserdem berechnen wir

$$\begin{aligned} PD^{n-3} &= \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 2^{n-1} & 1 \\ 3^{n-2} & 2^{n-2} & 1 \\ 3^{n-3} & 2^{n-3} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} &= PD^{n-3}P^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 2^{n-1} & 1 \\ 3^{n-2} & 2^{n-2} & 1 \\ 3^{n-3} & 2^{n-3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ -8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \cdot 3^{n-1} + 13 \cdot 2^{n-1} - 8 \\ -4 \cdot 3^{n-2} + 13 \cdot 2^{n-2} - 8 \\ -4 \cdot 3^{n-3} + 13 \cdot 2^{n-3} - 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

für $n \geq 3$. Also gilt

$$a_n = -4 \cdot 3^{n-1} + 13 \cdot 2^{n-1} - 8, \qquad n \geq 1.$$

(d) Wir schreiben die rekursive Definition mit Hilfe einer Matrixgleichung auf. Damit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 3.$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-3} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-3} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 3.$$

Wir wollen also die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisieren, um die Matrixpotenz A^{n-3} zu berechnen. Wie oben sehen wir, dass $A = PDP^{-1}$, mit

$$P = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun folgt, dass

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-3} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = PD^{n-3}P^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 3.$$

Wir benutzen Gauss, um $Px = (5, 0, 1)^\top$ zu lösen und finden

$$x = P^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 \\ -27 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Ausserdem berechnen wir

$$\begin{aligned} PD^{n-3} &= \begin{pmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4^{n-1} & 2^{n-1} & 1 \\ 4^{n-2} & 2^{n-2} & 1 \\ 4^{n-3} & 2^{n-3} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} &= PD^{n-3}P^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4^{n-1} & 2^{n-1} & 1 \\ 4^{n-2} & 2^{n-2} & 1 \\ 4^{n-3} & 2^{n-3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -27 \\ 26 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 \cdot 4^{n-1} - 27 \cdot 2^{n-1} + 26 \\ 7 \cdot 4^{n-2} - 27 \cdot 2^{n-2} + 26 \\ 7 \cdot 4^{n-3} - 27 \cdot 2^{n-3} + 26 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

für $n \geq 3$. Also gilt

$$a_n = \frac{7 \cdot 4^{n-1} - 27 \cdot 2^{n-1} + 26}{6}, \qquad n \geq 1.$$

7. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ und
$$p_A(x) = (-1)^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0)$$
das charakteristische Polynom von A. Sei weiter
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   (a) Zeigen Sie, dass $p_C(x) = p_A(x)$. (2)

   (b) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind: ($\star$)

      (i) Es existiert $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass
$$S^{-1}AS = C.$$

      (ii) Es existiert $v \in \mathbb{C}^n$, so dass
$$\{v, Av, \ldots, A^{n-1}v\}$$
eine Basis von $\mathbb{C}^n$ ist.

Lösung:

(a) Mit Induktion über n (der Induktionsanfang ist klar) finden wir

$$\begin{aligned}
(-1)^n p_C(x) &= \det(xI_n - C) \\
&= x \cdot \det \begin{pmatrix} x & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ -1 & x & \ldots & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & a_3 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & x + a_{n-1} \end{pmatrix} - (-1)\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \ldots & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & x + a_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= x(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1) - (-1)^{n-1}(-a_0)(-1)^{n-1} \\
&= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0\,.
\end{aligned}$$

(b) $(i) \implies (ii)$: Wir nehmen an, dass $S^{-1}AS = C$, also auch
$$AS = SC\,.$$
Sei $v = Se_1$ die erste Spalte von S. Es gilt
$$AS = \big(ASe_1, \ldots, ASe_n\big)$$
und
$$SC = \big(Se_2, \ldots, Se_n, -Sa\big)\,.$$
Durch Vergleichen der Spalten finden wir daher
$$ASe_1 = Se_2\,,\ \ldots\ , ASe_{n-1} = Se_n\,,$$
and daher rekursiv
$$Av = Se_2\,, A^2v = Se_3\,, \ldots, A^{n-1}v = Se_n\,.$$
Da S invertierbar ist, bilden die Spalten eine Basis und die Behauptung ist gezeigt.

$(ii) \implies (i)$: Wir stellen den Vektor $A^n v$ in der Basis $\mathcal{B} = \{v, Av, \ldots, A^{n-1}v\}$ dar:

$$[A^n v]_{\mathcal{B}} = -b_0 v - b_1 Av - \ldots - b_{n-1}A^{n-1}v$$

und berechnen die Darstellungsmatrix

$$[m_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

Aus der Fragestellung wissen wir, dass das charakteristische Polynom gegeben ist durch

$$p_{[m_A]_{\mathcal{B}}} = p_A(x) = (-1)^n (x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0)$$

und aus (a) folgt $p_A(x) = p_C(x)$ und somit $a_i = b_i$ für alle i. Wir haben also $[m_A]_{\mathcal{B}} = C$ und die Basiswechselsmatrix $S = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{E_n}$, wobei E_n die Standardbasis ist, erfüllt gerade die gewünschte Gleichung

$$\begin{aligned} [\mathrm{Id}]_{E_n}^{\mathcal{B}} [m_A]_{E_n} [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{E_n} &= [m_A]_{\mathcal{B}} \\ S^{-1}AS &= C. \end{aligned}$$

Explizit gilt

$$S^{-1} = [\mathrm{Id}]_{E_n}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v, & Av, & A^2v, & \ldots & A^{m-1}v \end{pmatrix}.$$