Serie 3

Trigonalisierung, Minimalpolynom
Abgabe 15.3.2021

Hinweis: Sie können in den Aufgaben 1(a), 4(c) und 7 Punkte erhalten. Wenn nicht genauer spezifiziert, sind Matrizen hier immer in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

1. (a) Trigonalisieren sie die folgende Matrix: (2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Betrachten sie die lineare Abbildung $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}[x]_2)$ definiert durch

$$T(g(x)) = 2g(x) + 4g'(0)$$

Finden Sie eine Basis von $\mathbb{R}[x]_2$, in der T eine obere Dreiecksmatrix ist.

(c) Ist die Trigonalisierung (als obere Dreiecksmatrix) der linearen Abbildung T in (b) eindeutig?

Lösung:

(a) Wir folgen dem Algorithmus im Skript 5.4.11. Wir berechnen

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 3 \\ -1 & 2-x & 3 \\ -1 & 1 & -x \end{pmatrix} = -x(x-1)^2.$$

Der Eigenraum $V_1 := \mathrm{Eig}_A(1) = \mathrm{Sp}\{(1,1,0)^T\}$ ist eindimensional. Also ist die geometrische Vielfachheit kleiner als die algebraische Vielfachheit und A ist nicht diagonalisierbar. Wir definieren eine Basis

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + V_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + V_1 \right\}$$

von $\mathbb{R}^2/V_1$. Die Darstellungsmatrix ist nun

$$[(m_A)_{\mathbb{R}^3/V_1}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun wissen wir, dass $p_{(m_A)_{\mathbb{R}^3/V_1}}(x) = -x(x-1)$ und somit ist $(m_A)_{\mathbb{R}^3/V_1}$ diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist durch $(1,1)^T$ gegeben und $(0,1)^T$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Diese beiden Eigenvektoren bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3/V_1$, in der $(m_A)_{\mathbb{R}^3/V_1}$ diagonal ist. Wir erweitern die Vektoren zu einer Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^3$ in der m_a Trigonalgestalt hat. Wir können das auch überprüfen

$$\begin{aligned}[m_A]_{\mathcal{B}} &= [\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}[m_A]_{\mathcal{E}_3}[\mathrm{Id}_3]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3} \\ &= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1&3\\-1&2&3\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1&4&3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) Zuerst müssen wir eine Basis wählen. Bei Polynomen bietet sich die Basis $\mathcal{A} = \{x^2, x, 1\}$ an. Es gilt

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&4&2\end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass T in dieser Basis eine untere Dreiecksmatrix ist. Gesucht ist aber eine obere Dreiecksmatrix. Jetzt können wir Aufgabe 4 aus Serie 2 verwenden um auf die Basiswechselsmatrix

$$[\mathrm{Id}]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

zu kommen. Der Algorithmus aus dem Skript würde zum selben Resultat führen.

Dies resultiert in der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, welche auch mit glücklicherem Raten gefunden werden könnte.

(c) Die Trigonalisierung ist nicht eindeutig. Zum Beispiel können wir stattdessen die Basis $\mathcal{B}_2 = \{1, 1 + x, x^2\}$ verwenden, dann ist

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix}2&1&-2\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Um die Trigonalisierung eindeutig zu machen, verwendet man die Jordan-Normalform, die später in der Vorlesung eingeführt wird.

2. Wieso ist der folgende Beweis des Cayley-Hamilton-Satzes falsch?

$$p_A(x) = \det(A - xI_n) \Longrightarrow p_A(A) = \det(A - AI_n) = \det(A - A) = \det(0) = 0.$$

Lösung:

Der Schritt $p_A(A) = \det(A - AI_n)$ ist falsch. Die skalare Multiplikation mit x hat einen ganz anderen Effekt als die Matrixmultiplikation mit A. Ausserdem ergibt der falsche Beweis nicht mal das Resultat, das wir wollen: Der Cayley-Hamilton Satz sagt, dass $p_A(A) = 0_{M_{n\times n}(K)}$, aber

$$\det(A - A) = \det(0_{M_{n\times n}(K)}) = 0_K \neq 0_{M_{n\times n}(K)}.$$

Wenn man ein Polynom mit einer Matrix füttert sollte auch eine Matrix raus kommen.

3. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und sei

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

(a) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $a_0 \neq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass für invertierbare $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt:

$$A^{-1} = \left(-\frac{1}{a_0}\right)\left((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n\right)$$

(c) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Finden Sie ein Polynom $p(x)$ mit $p(A) = A^{-1}$.

Lösung:

(a) $\det(A) = p_A(0) = a_0$. Wenn die Determinante $\neq 0$ ist, dann ist die Matrix invertierbar.

(b) Aus Cayley-Hamilton wissen wir, dass $p_A(A) = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n &= 0 \\
a_0 I_n &= -((-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A) \\
a_0 A^{-1} &= -((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I_n) \\
A^{-1} &= \left(-\frac{1}{a_0}\right)((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I_n).
\end{aligned}$$

(c) Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_A(x) = -x^3 + 6x^2 + 3x - 18$$

und wir setzen in die Formel von (b) ein, um

$$A^{-1} = -\frac{1}{18}A^2 + \frac{1}{3}A + \frac{1}{6}I_3\,.$$

zu bekommen.

4. Finden Sie das Minimalpolynom der folgenden Matrizen:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) (2)

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom ist $p_A(x) = (x-1)^2$. Das Minimalpolynom M_A teilt das charakteristische Polynom, aber da $M_A(A) \neq 0$, muss $M_A(x) = p_A(x) = (x-1)^2$ gelten.

(b) Wir berechnen

$$p_B(x) = -(4-x)^2(x+4) - 21x + 66 = -(x-2)(x-1)^2$$

und verwenden, dass nicht nur M_B teilt p_B gilt, sondern auch dass p_B teilt M_B^n gilt. Somit müssen beide Faktoren $(x-2)$ und $(x-1)$ in M_B vorkommen. Die einzige Frage ist noch, ob $(x-1)$ doppelt vorkommt. Wir setzen ein:

$$(B-2I_3)(B-I_3) = \begin{pmatrix} -3 & 12 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

also muss $M_B = p_B$ gelten.

(c) Die Matrix C hat das charakteristische Polynom $(x-7)^4$. Da das Minimalpolynom von A das Polynom $(x-7)^4$ teilt, muss es die Form $M_C(x) = (x-7)^k$ haben für ein $k \leq 4$. Eine kleine Rechnung zeigt $A - 7I_4 \neq 0$ und $(A-7I_4)^2 = 0$. Also gilt $M_C(x) = (x-7)^2$.

Definition. *Ein Endomorphismus T ist eine* Projektion*, falls $T^2 = T$.*

Definition. *Eine Matrix A heisst* symmetrisch*, falls $A = A^T$.*

5. (a) Betrachten Sie $T \in \mathrm{End}(M_{n\times n}(\mathbb{R}))$, definiert durch $T(A) = A^T$. Finden Sie das Minimalpolynom von T und zeigen Sie, dass T diagonalisierbar ist. *Tipp:* $T^2 = \mathrm{Id}$.

(b) Betrachten Sie eine Projektion $T \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie dass das Minimalpolynom M_T von T das Polynom $x^2 - x$ teilt und dass T diagonalisierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass jede relle symmetrische Matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ diagonalisierbar ist.

Bemerkung: Es gilt sogar, dass jede relle symmetrische $n \times n$-Matrix diagonalisierbar ist.

Lösung:

(a) Es gilt $T^2 - \mathrm{Id}_n = 0$, also ist $x^2 - 1 \in I_T$ und das Minimalpolynom teilt $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. Da die Nullstellen von x^2-1 unterschiedlich sind, sind auch die Nullstellen vom Minimalpolynom unterschiedlich. Satz 5.5.22 besagt, dass T diagonalisierbar ist genau dann wenn die Nullstellen des Minimalpolynoms unterschiedlich sind.

(b) Eine Projektion erfüllt $T^2 = T$, also erfüllt T das Polynom $x^2 - x$, welches somit im Ideal I_T ist. Das Minimalpolynom teilt somit $x^2 - x = x(x-1)$ und hat somit unterschiedliche Nullstellen was mit Satz 5.5.22 impliziert, dass T diagonalisierbar ist.

(c) Eine symmetrische Matrix ist immer von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

und wir berechnen das charakteristische Polynom

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{pmatrix} = (a-x)(c-x) - b^2 = x^2 - (a+c)x + ac - b^2,$$

dessen Nullstellen gegeben sind durch

$$x_{1,2} = \frac{a + c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2}.$$

Wir berechnen die Diskriminante $(a+c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$. Somit zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren und ist somit trigonalisierbar. Falls $b = 0$, dann ist die Matrix von der Form

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

also diagonal. Wenn hingegen $b \neq 0$, dann ist die Diskriminante strikt positiv, das heisst es gibt zwei verschiedene Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also zwei verschiedene Eigenwerte. Die geometrische und algebraische Vielfachheiten sind dann gleich und die Matrix ist diagonalisierbar.

Definition. *Ein Endomorphismus T von V heisst* nilpotent*, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $T^k = 0 \in \mathrm{End}(V)$.*

6. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und $n = \dim(V)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.
   (i) T ist nilpotent.
   (ii) $p_T(x) = \pm x^n$.
   (iii) Es gibt ein $1 \leq d \leq n$, so dass $T^d = 0$.
   (iv) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Tipp. *Für (i) $\Rightarrow$ (ii) verwenden Sie, dass das Ideal I_T vom Minimalpolynom generiert wird.*

Lösung:

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* : Wenn $T^k = 0$, dann ist das Polynom x^k im Ideal

$$I_T := \{g \in K[x] \mid g(T) = 0\} = \langle M_T \rangle.$$

Wir schliessen, dass es ein $s \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $M_T^s(x) = x^k$. Also ist $M_T(x) = x^{\frac{k}{s}}$ und da p_T das Polynom M_T^n teilt und den Grad n haben muss, gilt $p_T(x) = \pm x^n$. Das zeigt *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* : Da das Minimalpolynom das charakteristische Polynom teilt muss es von der Form $M_T(x) = x^d$ für $d \leq n$ sein. Mit Cayley-Hamilton folgt $M_T(T) = T^d = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)* : Aus $T^d = 0$ folgt direkt, dass T nilpotent ist.

(ii) $\Rightarrow$ *(iv)* : Das charakteristische polynom zerfällt in Linearfaktoren und alle Nullstellen sind 0. Also kann man die Matrix trigonalisieren.

(iv) $\Rightarrow$ *(i)* : Man berechnet direkt, dass $[T]_{\mathcal{B}}^n = 0$ und wenn eine Darstellungsmatrix 0 ist, dann ist auch die lineare Abbildung 0.

7. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass der Schnitt von beliebigen T-invarianten Unterräumen von V auch ein T-invarianter Unterraum ist. (2)

Lösung:

Wir wissen aus LAI, dass der Schnitt von Unterräumen wieder ein Unterraum ist. Sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$, U_i ein T-invarianter Unterraum von V, das heisst $T(U) \subseteq U$. Nehmen wir ein Element

$$v \in \bigcap_{i \in I} U_i$$

aus dem Schnitt, dann gilt $v \in U_i$ für jedes $i \in I$. Aus der T-Invarianz folgt, dass auch $T(v) \in U_i$ für alle i, also $T(v) \in_{i \in I} U_i$. Wir haben die T-invarianz

$$T\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} U_i$$

gezeigt.

8. Sei $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und $T(A) = A^T$. Finden Sie eine geordnete Basis für den T-zyklischen Unterraum $\operatorname{Zykl}(v) = \operatorname{Sp}\left\{T^i(v) \colon i \in \{0\} \cup \mathbb{N}\right\}$ für

   (a) $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Lösung:

   (a) Es gilt $v = T(v)$, also ist $\{v\}$ eine Basis von $\operatorname{Zykl}(v)$.

   (b) Hier gilt $T(v) = -v$ und $T^2(v) = v$, deshalb ist zum Beispiel $\{v\}$ eine Basis von $\operatorname{Zykl}(v)$.

9. Sei A eine $n \times n$ Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\dim\left(\operatorname{Sp}\left(I_n, A, A^2, \ldots\right)\right) \leq n.$$

Tipp. *Verwenden Sie die Idee vom Beweis von Lemma 5.5.11(1) im Skript.*

Lösung:

Wir behaupten, dass für jedes $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt $A^{n+\ell} \in \operatorname{Sp}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$. Dann ist $\{I_n, A, A^2, A^{n-1}\}$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Sp}(I_n, A, A^2, \ldots)$ und hat n Elemente. Eine Basis ist ein minimales Erzeugendensystem, also ist die Dimension höchstens n.

Wir beweisen die Behauptung mit Induktion. Für den Induktionsanfang betrachten wir $\ell = 0$, also A^n. Mit Cayley-Hamilton wissen wir, dass $0 = p_A(A) = \pm A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0$, was wir umformen können zur gewünschten Inklusion:

$$A^n = \pm(a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0) \in \operatorname{Sp}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$$

Sei jetzt $\ell \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass für alle $i < \ell$ gilt $A^{n+i} \in \operatorname{Sp}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$. Dann haben wir $0 = A^\ell \cdot 0 = A^\ell \cdot p_A(A) = \pm A^{n+\ell} + a_{n-1}A^{n-1+\ell} + \ldots + a_0 A^\ell$ und somit folgt mit der Induktionsannahme

$$A^{n+\ell} = \pm(a_{n-1}A^{n-1+\ell} + \ldots + a_0 A^\ell) \in \operatorname{Sp}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}).$$