Serie 4

Euklidische und unitäre Vektorräume
Abgabe 22.3.2021

Hinweis: In dieser Serie ist $\mathbb{F}$ jeweils $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V ist ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Für die Übungen 2(b), 4, 7 und 8(b) können Sie Punkte bekommen. Aufgabe 8(c) ist aufwändig und soll nur gelöst werden, wenn man genug Zeit hat. Die Aufgaben 8(d) und (e) können hingegen unter Annahme von (c) ohne viel Aufwand gelöst werden.

1. Zeigen Sie, dass eine symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ positiv-definit ist, genau dann wenn $a > 0$ und $\det(A) > 0$.

   Hinweis: Quadratische Ergänzung.

   Lösung:

   Sei A positiv definit, das heisst $v^T Av > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$. Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ berechnen wir

   $$v^T Av = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = av_1^2 + 2bv_1v_2 + cv_2^2$$

   Wir wählen zuerst $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und bekommen $v^T Av = a > 0$. Dann wählen wir $v' = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ und bekommen $v'^T Av' = ab^2 + 2b(-b)a + ca^2 = ca^2 - b^2 a > 0$ und da $a > 0$, können wir a dividieren um $\det(A) = ac - b^2 > 0$ zu bekommen.

   Für die andere Richtung sei $a > 0$ und $\det(A) > 0$. Wir machen eine quadratische Ergänzung und bekommen

   $$v^T Av = av_1^2 + 2bv_1v_2 + cv_2^2 = \left(\sqrt{a}v_1 + \frac{b}{\sqrt{a}}v_2\right)^2 - \frac{b^2}{a}v_2^2 + cv_2^2 = \left(\sqrt{a}v_1 + \frac{b}{\sqrt{a}}v_2\right)^2 + \frac{\det(A)}{a}v_2^2 > 0$$

2. Betrachten Sie das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $\langle v, w\rangle_A = v^T Aw$ für $v, w \in \mathbb{R}^2$, wobei

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Sei $||\cdot||$ die induzierte Norm.

   (a) Berechnen Sie $\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|$, $\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|$ und $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_A$.

   (b) Finden Sie alle Vektoren, die orthogonal zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind und machen Sie eine Skizze. (2)

   Lösung:

   (a) Wir berechnen direkt

   $$\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 1$$

   $$\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_A} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

   $$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1.$$

(b) Sei $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a + b.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = -b$, also sind das genau alle Vektoren $\begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix}$ für $b \in \mathbb{R}$.

Im Bild 1 sieht man, dass das Skalarprodukt *nicht* mit der üblichen Intuition von senkrecht übereinstimmt.

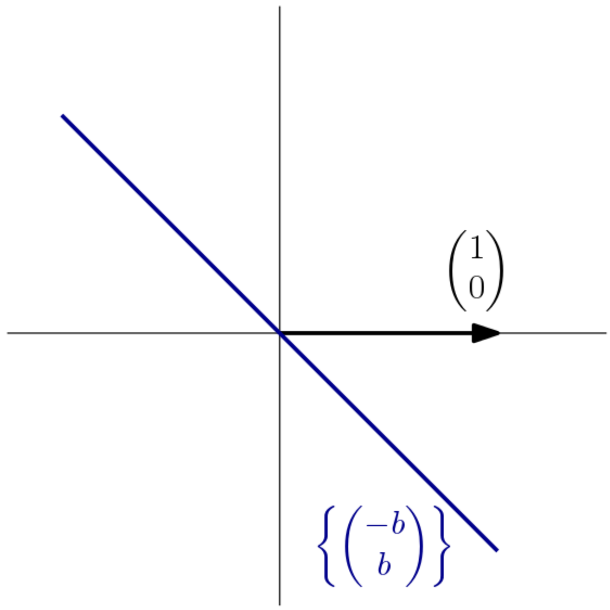

Figure 1: Der Unterraum $\left\{ \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} \right\}$ ist orthogonal zum Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, obwohl es nicht so aussieht.

3. Wir betrachten den Vektorraum

$$V = C([0,1], \mathbb{C}) = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig und } f(0) = f(1)\}$$

der stetigen zyklischen Funktionen und definieren

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

für $f, g \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist.

(b) Für $n \in \mathbb{Z}$, sei $f_n(t) = e^{ni2\pi t}$. Zeigen Sie, dass für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\langle f_n, f_m \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad m = n \\ 0, & \text{falls} \quad m \neq n \end{cases}$$

(c) Zeigen Sie, dass $\langle \sin(2\pi nt), \cos(2\pi nt) \rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Lösung:

(a) Sei $f, f', g \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Die Linearität im ersten Eintrag folgt aus

$$\begin{aligned}\langle \lambda f + f', g\rangle &= \int_0^1 (\lambda f + f')(t)\overline{g}(t)dt = \int_0^1 \lambda f(t)\overline{g}(t) + f'(t)\overline{g}(t)dt \\ &= \lambda \int_0^1 f(t)\overline{g}(t)dt + \int_0^1 f'(t)\overline{g}(t)dt = \lambda\langle f, g\rangle + \langle f', g\rangle\end{aligned}$$

und zusamen mit der Symmetrie

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g}(t)dt = \int_0^1 \overline{\overline{f}(t)g(t)}dt = \overline{\int_0^1 \overline{f}(t)g(t)dt} = \overline{\langle g, f\rangle}$$

folgt die Sesquilinearität. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist. Wir bemerken, dass für alle $t \in [0,1]$ gilt $f(t)\overline{f}(t) = |f(t)|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Integrieren über eine nicht-negative Funktion resultiert in ein nicht-negatives Integral:

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{f}(t)dt = \int_0^1 |f(t)|^2 dt \geq 0.$$

Falls es ein $t \in [0,1]$ gibt, so dass $f(t) > 0$, dann folgt wegen der Stetigkeit, dass es ein ganzes Intervall $I = [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ gibt, auf dem f positiv ist. Dann ist auch das Integral $\langle f, f\rangle$ strikt positiv. Wir haben gezeigt, dass $\langle f, f\rangle = 0$ nur genau dann wenn $f = 0$.

(b) Falls $n = m$, dann

$$\langle f_n, f_n\rangle = \int_0^1 e^{ni2\pi t}\overline{e^{ni2\pi t}}dt = \int_0^1 e^{ni2\pi t}e^{-ni2\pi t}dt = \int_0^1 e^0 dt = \int_0^1 1dt = 1$$

und wenn $n \neq m$, dann gilt

$$\begin{aligned}\langle f_n, f_m\rangle &= \int_0^1 e^{ni2\pi t}\overline{e^{mi2\pi t}}dt = \int_0^1 e^{ni2\pi t}e^{-mi2\pi t}dt = \int_0^1 e^{(n-m)i2\pi t}dt = \left[\frac{1}{(n-m)i2\pi}e^{(n-m)i2\pi t}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{(n-m)i2\pi}e^{(n-m)i2\pi} - \frac{1}{(n-m)i2\pi}e^0 = \frac{1}{(n-m)i2\pi} - \frac{1}{(n-m)i2\pi} = 0.\end{aligned}$$

(c) Wir überlegen uns zuerst den Fall $n = 0$. Dann ist $\sin(2\pi nt) = \sin(0) = 0$ und es gilt $\langle 0, v\rangle = 0$ für jedes $v \in V$.

Wir dürfen jetzt also annehmen, dass $n \neq 0$. Wir erinnern uns, dass

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{it}}{2i} \qquad \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{it}}{2}$$

und schreiben $\sin(2\pi nt) = \frac{1}{2i}(f_n(t) - f_n(-t))$ und $\cos(2\pi nt) = \frac{1}{2}(f_n(t) + f_n(-t))$. Wir verwenden die Sesquilinearität für die Berechnung

$$\begin{aligned}\langle \sin(2\pi nt), \cos(2\pi nt)\rangle &= \left\langle \frac{1}{2i}f_n - \frac{1}{2i}f_{-n}, \frac{1}{2}f_n + \frac{1}{2}f_{-n}\right\rangle \\ &= \frac{1}{4i}\langle f_n, f_n\rangle + \frac{1}{4i}\langle f_n, f_{-n}\rangle - \frac{1}{4i}\langle f_{-n}, f_n\rangle - \frac{1}{4i}\langle f_{-n}, f_{-n}\rangle \\ &\overset{(\star)}{=} \frac{1}{4i} + 0 - 0 - \frac{1}{4i} = 0\end{aligned}$$

wobei wir für den Schritt $(\star)$ sowohl $n \neq 0$ als auch Aufgabe (b) verwenden.

4. Sei $V = M_{n\times n}(\mathbb{F})$. Das Frobenius-Produkt auf V ist definiert durch (2)

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{Frob}}\colon V\times V &\to \mathbb{F}\\ (A,B) &\mapsto \langle A,B\rangle_{\text{Frob}} = \operatorname{spur}\left(A^T\overline{B}\right).\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{Frob}}$ ein Skalarprodukt auf $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ ist.

Lösung:

Sei $A, A', B \in V, \lambda \in \mathbb{F}$. Wir berechnen zuerst in Matrixeinträgen

$$\operatorname{spur}(A^T\overline{B}) = \sum_{i=1}^n (A^T\overline{B})_{ii} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (A^T)_{ij}\overline{B}_{ji} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ji}\overline{B_{ji}}. \tag{1}$$

Wir überprüfen die Linearität im ersten Eintrag.

$$\langle\lambda A + A', B\rangle_{\text{Frob}} \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(\lambda A + A')_{ji}\overline{B_{ji}} = \lambda\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ji}\overline{B_{ji}} + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A'_{ji}\overline{B_{ji}} \overset{(1)}{=} \lambda\langle A,B\rangle_{\text{Frob}} + \langle A', B\rangle_{\text{Frob}}$$

Aus der Symmetrie

$$\langle B, A\rangle_{\text{Frob}} \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n B_{ji}\overline{A_{ji}} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \overline{\overline{B}_{ji}A_{ji}} = \overline{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ji}\overline{B_{ji}}} \overset{(1)}{=} \overline{\langle A,B\rangle}_{\text{Frob}}$$

folgt auch die Sesquilinearität im zweiten Argument. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{Frob}}$ positiv-definit ist. Wir bemerken, dass für $a\in\mathbb{F}$ gilt $a\overline{a} = |a|^2 \geq 0$. Es folgt

$$\langle A, A\rangle_{\text{Frob}} \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ji}\overline{A_{ji}} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |A_{ji}|^2 \geq 0$$

und Gleichheit gilt genau dann wenn für alle $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ gilt $A_{ij} = 0$, also $A = 0$.

5. Sei V ein Euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt und induzierter Norm $||\cdot||$.
   (a) Sei $u, v \in V$ mit $||u|| = ||v||$. Zeigen Sie, dass $u+v$ orthogonal zu $u-v$ steht.
   (b) Zeigen Sie, dass die Diagonalen eines Rhombus senkrecht zueinander stehen.

Lösung:

(a) Wir berechnen

$$\langle u+v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle v,v\rangle \overset{||u||=||v||}{=} 0.$$

(b) Ein Rhombus ist gegeben durch zwei Vektoren $u, v\in\mathbb{R}^2$ mit gleicher Länge. Die Diagonalen sind gerade $u+v$ und $u-v$. Laut (a) stehen sie orthogonal aufeinander. Die Situation ist in Abb. 2 dargestellt.

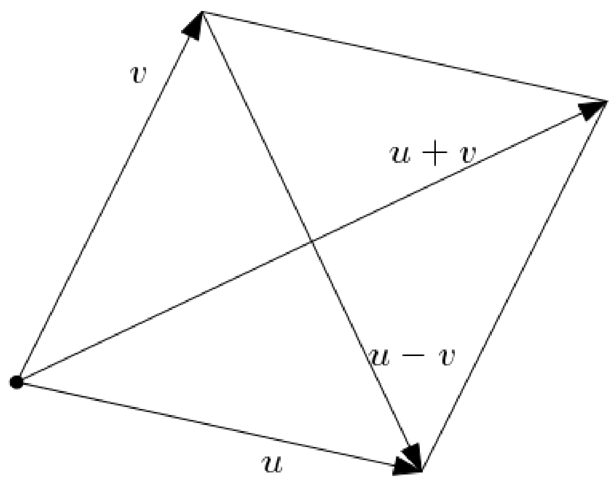

Figure 2: Ein Rhombus ist ein Viereck in dem alle Seiten gleich lang sind.

6. (a) Zeigen Sie, dass in Euklidischen Vektorräumen V die Polarisationsgleichung gilt:

$$\forall v, w \in V \quad \langle v, w\rangle = \frac{1}{2}\left(||v+w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2\right).$$

(b) Zeigen Sie, dass in unitären Vektorräumen W gilt:

$$\forall v, w \in W \quad \langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(||v+w||^2 - ||v-w||^2 + i||v+iw||^2 - i||v-iw||^2\right).$$

Lösung:

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} ||v+w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2 &= \langle v+w, v+w\rangle - \langle v, v\rangle - \langle w, w\rangle \\ &= \langle v, v+w\rangle + \langle w, v+w\rangle - \langle v, v\rangle - \langle w, w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle - \langle v, v\rangle - \langle w, w\rangle = 2\langle v, w\rangle, \end{aligned}$$

woraus die Polarisationsidentität folgt.

(b) Im unitären Vektorraum berechnen in Teilen

$$\begin{aligned} ||v+w||^2 - ||v-w||^2 &= \langle v+w, v+w\rangle - \langle v-w, v-w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle - \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle - \langle w, w\rangle \\ &= 2\langle v, w\rangle + 2\langle w, v\rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} i\left(||v+iw||^2 - ||v-iw||^2\right) &= i\left(\langle v+iw, v+iw\rangle - \langle v-iw, v-iw\rangle\right) \\ &= i\left(\langle v, v\rangle + \langle v, iw\rangle + \langle iw, v\rangle + \langle iw, iw\rangle - \langle v, v\rangle + \langle v, iw\rangle + \langle iw, v\rangle - \langle iw, iw\rangle\right) \\ &= i\left(-i\langle v, w\rangle + i\langle w, v\rangle - i\langle v, w\rangle + i\langle w, v\rangle\right) \\ &= 2\langle v, w\rangle - 2\langle w, v\rangle \end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$\begin{aligned} ||v+w||^2 - ||v-y||^2 + i||v+iw||^2 + i||v-iw||^2 &= 2\langle v, w\rangle + 2\langle w, v\rangle + 2\langle v, w\rangle - 2\langle w, v\rangle \\ &= 4\langle v, w\rangle. \end{aligned}$$

7. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{F}^n$ und $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in \mathbb{F}^n$. Zeigen Sie, dass der verallgemeinerte Satz des Pythagoras gilt: (2)
$$||v||^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2.$$

Lösung:

Die Orthonormalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$ erfüllt
$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$
wobei
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$
das Kroneckerdelta ist. Wir berechnen direkt
$$\begin{aligned} ||v||^2 = \langle v, v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left\langle v_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \overline{\lambda_j} \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \overline{\lambda_j} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2. \end{aligned}$$

8. Im Folgenden sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und bezeichne $\|\cdot\|$ die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm auf V.
   (a) Seien $v, w \in V$. Zeigen Sie, dass $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ genau dann gilt, wenn v und w zueinander orthogonal sind.
   (b) Beweisen Sie, dass für alle $v, w \in V$ die *Parallelogrammgleichung* gilt: (2)
$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$
   (c) Sei W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum versehen mit einer Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind: ($\star$)
      1. Es existiert ein inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf W, welches $\|\cdot\|$ induziert.
      2. Die Norm $\|\cdot\|$ erfüllt die Parallelogrammgleichung aus Teilaufgabe b.

   Hinweis: Untersuchen Sie die Abbildung $W \times W \to \mathbb{R}$,
$$(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle := \frac{1}{4}\big(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2\big).$$
   i) $\forall\, w \in W : \langle 0, w \rangle = 0$.
   ii) $\forall\, v_1, v_2, w \in W : \langle v_1 + v_2, w \rangle + \langle v_1 - v_2, w \rangle = 2\langle v_1, w \rangle$.
   iii) $\forall\, v_1, v_2, w \in W : \langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$.
   iv) $\forall\, v, w \in W \,\forall\, n \in \mathbb{Z} : \langle nv, w \rangle = n\langle v, w \rangle$.
   v) $\forall\, v, w \in W \,\forall\, n \in \mathbb{N} : n\langle \frac{1}{n} v, w \rangle = \langle v, w \rangle$.
   vi) $\forall\, v, w \in W \,\forall\, r \in \mathbb{Q} : \langle rv, w \rangle = r\langle v, w \rangle$.
   vii) $\forall\, v, w \in W : |\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\|w\|$.
   viii) $\forall\, v, w \in W \,\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \forall r \in \mathbb{Q}$:
$$|\lambda\langle v, w \rangle - \langle \lambda v, w \rangle| = |(\lambda - r)\langle v, w \rangle - \langle (\lambda - r)v, w \rangle| \leq 2|\lambda - r|\|v\|\|w\|.$$
   ix) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein inneres Produkt und induziert $\|\cdot\|$.

(d) Die Manhattan-Norm (oder L_1-Norm) auf $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}||\cdot||_1 \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}_{\geq 0}\\ (v_1, v_2) &\mapsto |v_1| + |v_2|.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $||\cdot||_1$ eine Norm-Funktion ist.

(e) Zeigen Sie, dass es kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ gibt, das die Manhattan-Norm induziert.

Lösung:

(a) Es ist per Definition

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 =&\langle v+w, v+w\rangle\\ =&\langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle\\ =&\|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v,w\rangle\end{aligned}$$

und folglich gilt $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ genau dann, wenn $\langle v,w\rangle = 0$.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 =&\langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle\\ =&\langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle\\ &+ \langle v,v\rangle - 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle\\ =&2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.\end{aligned}$$

Die Bedeutung der Parallelogrammgleichung ergibt sich am besten anhand eines Bildes (siehe Abbildung 3).

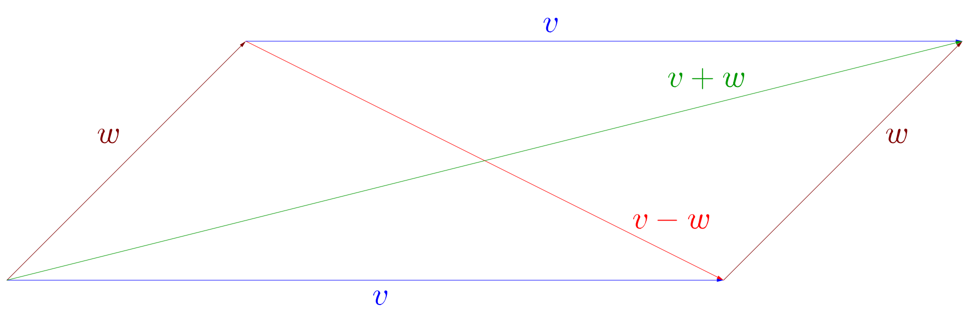

Figure 3: Eine Illustration der Parallelogrammgleichung. In $\mathbb{R}^2$ folgt die Parallelogrammgleichung beispielsweise aus dem Kosinussatz.

(c) Wir haben bereits in Teilaufgabe b gezeigt, dass die Parallelogrammgleichung gilt, wenn die Norm durch ein inneres Produkt induziert ist. D.h. insbesondere, dass es ausreicht zu zeigen, dass jede Norm, die die Parallelogrammgleichung erfüllt, ein inneres Produkt induziert. Sei also eine solche Norm gegeben. Wir definieren wie im Hinweis

$$\langle v,w\rangle := \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2).$$

Es gilt

$$\langle v,v\rangle = \frac{1}{4}(\|2v\|^2 - \|0\|^2) = \|v\|^2$$

und folglich ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv. Die Symmetrie folgt sofort, da $\|v+w\| = \|w+v\|$ sowie $\|v-w\| = \|w-v\|$. Wir müssen also nur beweisen, dass die Abbildung im ersten Argument linear ist. Hierfür befolgen wir die Schritte aus dem Hinweis.

i) Es ist nach Definition

$$\langle 0, w\rangle = \frac{1}{4}\big(\|0+w\|^2 - \|0-w\|^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|w\|^2 - (-1)^2\|w\|^2\big) = 0.$$

ii) Hier verwenden wir die Parallelogrammgleichung und erhalten

$$\begin{aligned}4\langle v_1+v_2, w\rangle + 4\langle v_1 - v_2, w\rangle =& \|v_1+v_2+w\|^2 - \|v_1+v_2-w\|^2\\ &+ \|v_1-v_2+w\|^2 - \|v_1-v_2-w\|^2\\ =& -\|v_1-v_2+w\|^2 + 2\|v_1+w\|^2 + 2\|-v_2\|^2\\ &+ \|v_1-v_2-w\|^2 - 2\|v_1-w\|^2 - 2\|-v_2\|^2\\ &+ \|v_1-v_2+w\|^2 - \|v_1-v_2-w\|^2\\ =& 2\big(\|v_1+w\|^2 - \|v_1-w\|^2\big)\\ =& 8\langle v_1, w\rangle.\end{aligned}$$

Nach Division beider Seiten durch 4 folgt die Behauptung.
Wir bemerken die folgenden Spezialfälle:

$$\begin{aligned}v_1 = v_2 &\Rightarrow \langle 2v_1, w\rangle = 2\langle v_1, w\rangle,\\ v_1 = 0 &\Rightarrow \langle -v_2, w\rangle = -\langle v_2, w\rangle.\end{aligned}$$

iii) Wir berechnen

$$\begin{aligned}2\langle v_1, w\rangle + 2\langle v_2, w\rangle =& \langle v_1+v_2, w\rangle + \langle v_1-v_2, w\rangle\\ &+ \langle v_2+v_1, w\rangle + \langle v_2 - v_1, w\rangle\\ =& \langle v_1+v_2, w\rangle + \langle v_1-v_2, w\rangle\\ &+ \langle v_1+v_2, w\rangle + \langle -(v_1-v_2), w\rangle\\ =& 2\langle v_1+v_2, w\rangle\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt nach Division durch 2.

iv) Sei zuerst $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen, dass die Aussage für $n = 1, 2$ wahr ist. Wir beweisen die Aussage per Induktion. Angenommen $n > 2$ und sei die Aussage wahr für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < n$.
Falls $2 \mid n$ gilt, dann existiert $k \in \mathbb{N}$, sodass $n = 2k$ und es ist $1 \leq k < n$. Folglich gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\langle nv, w\rangle = \langle 2(kv), w\rangle = 2\langle kv, w\rangle = (2k)\langle v, w\rangle = n\langle v, w\rangle$$

und die Behauptung ist für n bewiesen.
Falls $2 \nmid n$, dann gilt $n = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k+1 < n$. Es folgt aus Teil (ii), sowie der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\begin{aligned}(n+1)\langle v, w\rangle =& 2\langle (k+1)v, w\rangle\\ =& \langle (k+1)v + kv, w\rangle + \langle (k+1)v - kv, w\rangle\\ =& \langle nv, w\rangle + \langle v, w\rangle\end{aligned}$$

und es folgt $n\langle v, w\rangle = \langle nv, w\rangle$.
Sei nun $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, und sei $n \neq 0$, da letzterer Fall bereits in (i) behandelt wurde. Dann ist $n = -m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und folglich ist wegen der bemerkung in (ii) und der Diskussion des Spezialfalls $n \in \mathbb{N}$

$$\langle nv, w\rangle = \langle -mv, w\rangle = -\langle mv, w\rangle = -m\langle v, w\rangle = n\langle v, w\rangle.$$

v) Wegen dem eben gezeigten, gilt

$$n\langle \tfrac{1}{n} v, w\rangle = \langle n\tfrac{1}{n} v, w\rangle = \langle v, w\rangle.$$

vi) Sei $r = \frac{n}{m}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$, dann gilt wegen (iv) und (v)

$$r\langle v, w\rangle = n\big(\tfrac{1}{m}\langle v, w\rangle\big) = n\langle \tfrac{1}{m} v, w\rangle = \langle n(\tfrac{1}{m} v), w\rangle = \langle rv, w\rangle.$$

vii) Es ist nach Definition und unter Verwendung der Parallelogramm- und der Dreiecksungleichungen

$$\begin{aligned} 4|\langle v, w\rangle| =& \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 \\ =& 2\|v + w\|^2 - 2\|v\|^2 - 2\|w\|^2 \\ \leq& 2(\|v\| + \|w\|)^2 - 2\|v\|^2 - 2\|w\|^2 = 4\|v\|\|w\| \end{aligned}$$

und die gewünschte Aussage folgt nach Division durch 4.

viii) Es gilt

$$\begin{aligned} |\lambda\langle v, w\rangle - \langle \lambda v, w\rangle| &\overset{(vi)}{=} |\lambda\langle v, w\rangle - r\langle v, w\rangle + \langle rv, w\rangle - \langle \lambda v, w\rangle| \\ &\overset{(iii)}{=} |(\lambda - r)\langle v, w\rangle - \langle (\lambda - r)v, w\rangle| \\ &\leq |(\lambda - r)\langle v, w\rangle| + |\langle (\lambda - r)v, w\rangle| \\ &\overset{(vii)}{\leq} |\lambda - r|\|v\|\|w\| + \|(\lambda - r)v\|\|w\| \\ &= 2|\lambda - r|\|v\|\|w\|. \end{aligned}$$

ix) Wir wissen, dass $\langle \cdot, \cdot\rangle$ symmetrisch und positiv ist, und wir haben bereits gezeigt, dass für alle $w \in V$ die Abbildung $v \mapsto \langle v, w\rangle$ additiv ist. Wir müssen also nur noch zeigen, dass für alle $v, w \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$. Seien $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ dicht ist, existiert ein $r \in \{Q\}$, sodass $0 \leq 2|\lambda - r|\|v\|\|w\| < \epsilon$. Insbesondere ist also nach (viii)

$$|\lambda\langle v, w\rangle - \langle \lambda v, w\rangle| \leq 2|\lambda - r|\|v\|\|w\| < \epsilon.$$

Da ϵ beliebig war, folgt $|\lambda\langle v, w\rangle - \langle \lambda v, w\rangle| = 0$ und folglich ist

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle.$$

Da $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$ beliebig waren, folgt die Linearität in der ersten Komponente und somit ist $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ein inneres Produkt.
Es wurde bereits für die Positivität gezeigt, dass $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$, und somit ist $\|\cdot\|$ durch $\langle \cdot, \cdot\rangle$ induziert.

(d) Wir müssen zeigen, dass $||\cdot||_1$ eine Norm ist. Sei $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir folgern zuerst die Dreiecksungleichung

$$||v + w||_1 = |v_1 + w_1| + |v_2 + w_2| \leq |v_1| + |w_1| + |v_2| + |w_2| = ||v||_1 + ||w||_1$$

aus der Dreiecksungleichung des Betrags. Falls $||v||_1 = 0$, dann haben wir $|v_1| + |v_2| = 0$, also $v_1 = 0 = v_2$ und $v = 0$. Die dritte Eigenschaft einer Norm

$$||\alpha \cdot v||_1 = |\alpha v_1| + |\alpha v_2| = |\alpha|(|v_1| + |v_2|) = |\alpha| \cdot ||v||_1.$$

ist auch erfüllt.

(e) Wir wählen $v = (1, 1), w = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$. Die Parallelogrammgleichung

$$||v + w||_1^2 + ||v - w||_1^2 = 2^2 + 2^2 \neq 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 = 2||v||_1^2 + 2||w||_1^2$$

gilt für diese Vektoren nicht. Wir folgern aus 8(c), dass es kein Skalarprodukt gibt, dass die Norm $||\cdot||_1$ indzuiert.

9. Sei V ein Vektorraum mit innerem Produkt und induzierter Norm $||\cdot||$. Sei $u, v \in V$ mit

$$||u|| = 5, \quad ||u+v|| = 8 \quad \text{und} \quad ||u-v|| = 6$$

Was ist $||v||$?

Lösung:

Wir verwenden die Parallelogramgleichung aus 8(b) und berechnen direkt

$$2||v||^2 = ||u+v||^2 + ||u-v||^2 - 2||u||^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 5^2 = 50,$$

also gilt $||v|| = \sqrt{25} = 5$.