Serie 5

Gram-Schmidt und orthogonale Projektion
Abgabe 29.3.2021

Hinweis: Mit $\mathbb{F}$ ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gemeint. Punkte können Sie in den Aufgaben 3(a), 4(a) und 7 holen.

1. Sei V ein Euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie den Cosinussatz für $x, y \in V$ wobei φ der Winkel zwischen x und y ist.
$$||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\,||x|| \cdot ||y|| \cos(\varphi)$$

Lösung:
Wir erinnern uns an die Definition
$$\varphi = \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||}\right)$$
des Winkels φ in einem Euklidischen Vektorraum. Somit haben wir
$$\begin{aligned} ||x-y||^2 &= \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= ||x||^2 + ||y||^2 - 2\,||x|| \cdot ||y|| \cos(\varphi). \end{aligned}$$

2. Sei $V = \mathbb{R}^3$ ein Euklidischer Vektorraum mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$, so dass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix in der Basis
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$$
ist. Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, so dass T immer noch obere Dreiecksgestalt hat.
Hinweis: Gram-Schmidt.

Lösung:
Wir wenden Gram-Schmidt an.
$$\overline{w}_1 = w_1 = v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$
$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$
$$\overline{w}_2 = \frac{1}{||w_2||} w_2 = \begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},$$
$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 = \begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$\overline{w}_3 = \begin{pmatrix}0\\ \frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

und bekommen eine Orthonormalbasis $\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3\}$.

Ein Endomorphismus ist eine obere Dreiecksmatrix in einer Basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ genau dann wenn $\operatorname{Span}(e_1, e_2, \ldots, e_j)$ für jedes $j \leq n$ T-invariant ist.

Die Gram-Schmidt Prozedur macht, dass

$$\operatorname{Span}(v_1, v_2, v_3) = \operatorname{Span}(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3)$$

und somit bleibt die obere Dreiecksmatrixgestalt erhalten.

3. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a) In Aufgabe 1, Serie 3 haben Sie die Matrix A trigonalisiert. Finden Sie eine orthogonale Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass $[A]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Schreiben Sie die dazugehörige Schur-Zerlegung $O^T AO = R$ explizit hin. (2)

(b) Finden Sie eine QR-Zerlegung.

Lösung:

(a) Wir erinnern uns an die Lösung von Aufgabe 1, Serie 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und wenden Gram-Schmidt auf die gefundene Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an. Wir bekommen

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
\overline{w}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\overline{w}_2 &= \frac{1}{||w_2||} w_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}, \\
w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
\overline{w}_3 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und die Schur-Zerlegung ist explizit gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{1}{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{1}{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Für die QR-Zerlegung sehen wir die Zeilen der Matrix A als Liste von Vektoren (wir bemerken, dass sie nicht linear unabhängig sind):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und wenden darauf Gram-Schmidt an:

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
\overline{w}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\
w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
\overline{w}_2 &= \frac{1}{||w_2||} w_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} \end{pmatrix}, \\
v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 &- \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Weil v_3 nicht linear unabhängig von den anderen Vektoren ist, können wir einen beliebigen linear unabhängigen Vektor

$$v_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nehmen um aufzufüllen. Wir führen den Gram-Schmidt-Prozess weiter:

$$\begin{aligned}
w_3 &= v_3' - \frac{\langle v_3', w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3', w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
\overline{w}_3 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und bekommen die QR-Zerlegung für

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{1}{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \quad R = Q^{-1}A = Q^T A$$

und somit $A = QR$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{1}{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{3}{2}\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Betrachten Sie das Skalarprodukt
$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$
auf $V = \mathbb{R}[x]_2$.
   (a) Wenden Sie den Gram-Schmidt-Algorithmus auf die Basis $\{1, x, x^2\}$ an, um eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[x]_2$ zu bekommen. (2)
   (b) Finden Sie ein Polynom $q \in \mathbb{R}[x]_2$, so dass
$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$
   für alle $p \in \mathbb{R}[x]_2$.
   (c) Finden Sie eine Basis des Dualraums $V^\star$.

Lösung:

(a) Mit dem Gram-Schmidt Algorithmus kommt man mit den Schritten

$$\begin{aligned}
\overline{w}_1 &= w_1 = 1 \\
w_2 &= x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x - \frac{1/2}{1} 1 = x - \frac{1}{2}, \\
\overline{w}_2 &= \frac{1}{||w_2||} w_2 = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), \\
w_3 &= x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{\langle x^2, x - \frac{1}{2} \rangle}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle}\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1/3}{1} 1 - \frac{1/12}{1/12}\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6} \\
\overline{w}_3 &= 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)
\end{aligned}$$

auf die neue Basis $\mathcal{B} = \left\{1, 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}$.

(b) In der Basis $\mathcal{B}$ ist der Vektor $p = (a, b, c)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
p(x) &= a + 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) b + 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) c \\
p\left(\frac{1}{2}\right) &= a - \frac{\sqrt{5}}{2} c
\end{aligned}$$

und wenn wir das Polynom $q = (1, 0, -\frac{\sqrt{5}}{2})$ verwenden bekommen wir

$$\langle p, q \rangle = a - \frac{\sqrt{5}}{2} c = p\left(\frac{1}{2}\right).$$

(c) Zu einer Basis kann die duale Basis gefunden werden:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: p \mapsto \langle p\ , 1\rangle \\
\varphi_2 &: p \mapsto \left\langle p\ , 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right\rangle \\
\varphi_3 &: p \mapsto \left\langle p\ , 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

5. Betrachten Sie den unendlichdimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ mit dem Skalarprodukt ($\star$)

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Seien $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ die durch Anwenden des Gram–Schmidt Verfahrens auf die Basis $\{1, x, x^2, \ldots\}$ von $\mathbb{R}[x]$ gewonnenen Polynome. Zeigen Sie, dass

$$p_n = c_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dx}^n}(x^2-1)^n,$$

mit Konstanten $0 \neq c_n \in \mathbb{R}$ (Rodrigues Formel).

Bemerkung: Bis auf die Konstanten sind die so gewonnenen Polynome die Legendre Polynome, die in der MMP I Vorlesung noch eine wichtige Rolle spielen werden.

Lösung:

Die aus dem Gram-Schmidt-Verfahren gewonnenen p_n sind bis auf Normierung eindeutig durch die folgenden beiden Eigenschaften charakterisiert:

- p_n hat Grad n.
- p_n ist orthogonal zu allen x^k für $k < n$.

Sei $q_n = c_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dx}^n}(x^2-1)^n$, dann müssen wir also nur noch prüfen, dass q_n die beiden Bedingungen erfüllt. Es ist klar, dass q_n Grad n hat, als n-fache Ableitung eines Polynoms vom Grad $2n$. Ausserdem gilt für $k < n$ (durch partielle Integration):

$$\begin{aligned}
\left\langle x^k, q_n\right\rangle &= c_n \int_{-1}^{1} x^k \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dx}^n}(x^2-1)^n\,\mathrm{dx} \\
&= (-1)^n c_n \int_{-1}^{1} \left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dx}^n} x^k\right)(x^2-1)^n\,\mathrm{dx} = 0.
\end{aligned}$$

Hierbei verschwinden jeweils die Randterme, da alle Ableitungen von $(x^2-1)^n$ bis zur $(n-1)$-ten in $x = \pm 1$ verschwinden.

6. Seien $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ zwei Skalarprodukte auf einem $\mathbb{F}$-Vektorraum V, so dass $\langle v, w\rangle_1 = 0$ genau dann wenn $\langle v, w\rangle_2 = 0$ (für $v, w \in V$). Beweisen Sie, dass es eine positive Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\langle v, w\rangle_1 = c\langle v, w\rangle_2$ für alle $v, w \in V$.

Lösung:

Wir zeigen zuerst, dass die Skalarprodukte sich auf einer Orthonormalbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ definiere

$$c_i = \frac{\langle e_i, e_i\rangle_2}{\langle e_i, e_i\rangle_1} = \langle e_i, e_i\rangle_2.$$

Wir wollen zeigen, dass $c_i = c_1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wir fixieren also ein $i \neq 1$. Wir verwenden $\langle e_i, e_1 \rangle_1 = 0$ um zu sehen

$$\langle e_1 - e_i, e_1 + e_i \rangle_1 = \langle e_1, e_1 \rangle_1 - \langle e_i, e_i \rangle_1 = 1 - 1 = 0.$$

Aus der Aufgabenstellung wissen wir, dass das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ Null ist, genau dann wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ Null ist. Es folgt, dass $\langle e_i, e_1 \rangle_2 = 0$. Ausserdem gilt

$$0 = \langle e_1 - e_i, e_1 + e_i \rangle_2 = \langle e_1, e_1 \rangle_2 - \langle e_i, e_i \rangle_2 = c_1 \langle e_1, e_1 \rangle_1 - c_i \langle e_i, e_i \rangle_1 = c_1 - c_i$$

und somit $c_1 = c_i$.

Im Allgemeinen schreiben wir $v, w \in V$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$$

für $\langle v, w \rangle \neq 0$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\langle v, w \rangle_1 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_j} \langle e_i, e_j \rangle_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_i} \langle e_i, e_i \rangle_1 \\
\langle v, w \rangle_2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_j} \langle e_i, e_j \rangle_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_i} \langle e_i, e_i \rangle_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_i} \langle e_i, e_i \rangle_1 c_i \\
\frac{\langle v, w \rangle_2}{\langle v, w \rangle_1} &= c_1.
\end{aligned}$$

Die Konstante $c = c_1$ ist der gesuchte Faktor.

7. Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, so dass $[m_A]_{\mathcal{B}}$ diagonal ist. Beweisen Sie, dass A symmetrisch ist. (2)

Lösung:

Laut Annahme haben wir eine orthonormale Matrix Q und eine diagonale Matrix D, so dass $[m_A]_{\mathcal{B}} = Q^{-1} A Q = D$. Wir schreiben $A = QDQ^{-1}$ und verwenden $Q^{-1} = Q^T$ um die Symmetrie zu folgern:

$$A^T = (QDQ^{-1})^T = (Q^{-1})^T D^T Q^T = QDQ^{-1} = A.$$

8. Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ genau dann orthogonal ist wenn die *Zeilen*vektoren eine Orthonormalbasis bezüglich des üblichen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$ bilden.

Hinweis: Bei einer orthogonalen Matrix bilden die *Spalten*vektoren eine Orthonormalbasis.

Lösung:

Laut Lemma 6.4.15 ist A orthogonal genau dann wenn $A^T A = I_n$. Daraus folgt direkt, dass $A^T = A^{-1}$ und somit auch $I_n = AA^T = (A^T)^T A^T$. Wir können wieder Lemma 6.4.15 verwenden und zu schliessen, dass auch A^T orthogonal ist, das heisst die Spaltenvektoren von A^T bilden eine Orthonormalbasis. Die Zeilenvektoren von A sind gerade die Spaltenvektoren von A^T, also bilden auch die Zeilenvektoren von A eine Orthonormalbasis.

Alle Schritte sind Äquivalenzen, also folgt auch die andere Richtung.

9. (a) Angenommen, U ist ein endlichdimensionaler Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass $U^\perp = \{0\}$ genau dann wenn $U = V$.

(b) Finden Sie einen Vektorraum V mit Untervektorraum U, so dass $U^\perp = \{0\}$, aber $U \neq V$.

Lösung:

(a) Falls $U = V$, dann folgt $U^\perp = \{0\}$ aus der positiv-definitheit des Skalarprodukts.

Die andere Richtung folgt direkt aus Satz 6.6.3.

Die Idee ist wie folgt. Wir nehmen an $U^\perp = \{0\}$. Sei $v \neq 0$ beliebig in V. Aus der Annahme folgt, dass es ein $u \in U$ gibt, so dass $\langle v, u\rangle \neq 0$. Dann kann man $v = \mathrm{Proj}_u(v) + w$ schreiben mit $\langle w, u\rangle = 0$. Da U eine endliche Basis hat, können wir das Prozedere induktiv mit w widerholen, bis wir bekommen $w \in U^\perp = \{0\}$. Dann ist $v \in U$, also (weil $0 \in U$) gilt $U = V$.

(b) Betrachten wir den Vektorraum $\mathbb{R}^\infty$ der Folgen in $\mathbb{R}$. Sei

$$U = \{(a_n)_n \in V \colon\ \exists k \in \mathbb{N} \forall n \geq k \colon a_n = 0\}$$

der Unterraum der Folgen, die irgendwann konstant 0 werden. Wir bemerken, dass für jedes i die Folge

$$(\delta_i)_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

in U ist. Eine Folge $a = (a_n)_n \in U^\perp$ erfüllt $\langle a, \delta_i\rangle = a_i = 0$ für alle i, also ist $a = 0$. und $U^\perp = \{0\}$, obwohl $U \neq V$.

10. Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, U ein Unterraum und $P_U \colon V \to V$ die orthogonale Projektion auf U.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Im}(P_U) = U$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(P_U) = U^\perp$.

(c) Sei $u \in U$, $w \in U^\perp$. Zeigen Sie, dass $P_U(u + w) = u$.

(d) Zeigen Sie, dass $P_U^2 = P_U$ und dass alle Vektoren in $w \in \mathrm{Ker}(P_U)$ orthogonal zu allen Vektoren in U stehen.

(e) Sei $P \in \mathrm{End}(V)$ so dass $P^2 = P$ und so dass jeder Vektor in $\mathrm{Ker}(P)$ orthogonal steht zu jedem Vektor in $\mathrm{Im}(P)$. Zeigen Sie, dass ein Unterraum $U \subseteq V$ existiert, so dass $P = P_U$.

Lösung:

Sei $e_1, \ldots, e_r$ eine Orthonormalbasis von U. Die Projektion auf U ist gegeben durch

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^{r} \langle v, e_i\rangle e_i$$

(a) Per Definition ist $P_U(v) \in U$ für alle $v \in V$.

(b) Sei $v \in U^\perp$, das heisst, dass für alle $u \in U$ gilt $\langle u, v\rangle = 0$. Insbesondere haben wir $P_U(v) = 0$, also ist $U^\perp \subseteq \mathrm{Ker}(P_U)$.

Sei nun $v \in V$ mit $P_U(v) = 0$, das heisst $\langle v, e_i\rangle = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots r\}$. Sei $u \in U$, wir schreiben

$$u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i$$

in der Basis $\{e_1, \ldots, e_r\}$. Wir haben nun

$$\langle v, u\rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle v, e_i\rangle = 0,$$

also ist $v \in U^\perp$. Wir haben gezeigt, dass $U^\perp = \mathrm{Ker}(P_U)$.

(c) Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von V, so dass $\{e_1, \ldots, e_r\}$ eine Orthonormalbasis von U ist. Dann ist $\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ und für $v = u + w \in U \oplus U^\perp$ können wir

$$u = \sum_{i=1}^{r} \langle u, e_i \rangle e_i, \qquad w = \sum_{i=r+1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i.$$

schreiben. Aus der Definition der orthogonalen Projektion folgt sofort, dass $P(v) = P(u + w) = u$.

(d) Sei $v \in V$. Wir bemerken, dass $P_U(e_i) = e_i$ und berechnen

$$P_U(P_U(v)) = P_U\left(\sum_{i=1}^{r} \langle v, e_i \rangle e_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \langle v, e_i \rangle P_U(e_i) = \sum_{i=1}^{r} \langle v, e_i \rangle e_i = P_U(v).$$

Sei $w \in \mathrm{Ker}(P_U) \overset{(b)}{=} U^\perp$. Also ist w orthogonal zu jedem Vektor in U.

(e) Inspiriert aus (a) definieren wir $U = \mathrm{Im}(P)$. Für $v \in V$ schreiben wir

$$v = P(v) + (v - P(v))$$

und bemerken, dass $P(v) \in U$ und $P(v - P(v)) = P(v) - P(v) = 0$, also $v - P(v) \in \mathrm{Ker}(P)$. Nach Annahme gilt $\langle P(v), v - P(v) \rangle = 0$.

Sei nun $u \in U$ beliebig und $v' = v + u - P(v)$. Mit der gleichen Argumentation wie oben haben wir

$$0 = \langle P(v'), v' - P(v') \rangle = \langle P(v) + P(u) - P(P(v)), v + u - P(v) - P(v) - P(u) + P(P(v)) \rangle = \langle P(u), v - P(v) \rangle,$$

und es folgt $v - P(v) \in U^\perp$.

Die orthogonale Projektion ist laut (c) die eindeutige Abbildung, die $u + w \in U \oplus U^\perp = V$ auf u sendet. Somit ist P die orthogonale Projektion.