Serie 6

Adjungierte, Spektralsätze
Abgabe 12. 4. 2021

Hinweis: In dieser Serie ist mit $\mathbb{F}$ immer $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gemeint und V ist ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. In den Aufgaben 2(b), 4 und 5(a) können Sie Punkte bekommen. Versuchen Sie in Aufgabe 4 eine saubere vollständige Induktion zu schreiben.

1. (a) Sei $U = \mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Finden Sie $u \in U$, so dass $\left\| u - \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\|$ minimiert wird.

   (b) Finden Sie ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]_3$, mit $p(0) = 0, p'(0) = 0$, so dass

$$\int_0^1 |2 + 3x - p(x)|^2 \,\mathrm{dx}$$

   minimal ist.

Lösung:

(a) Wir betrachten die orthogonale Projektion von $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ auf den Unterraum U. Dazu müssen wir eine Orthonormalbasis von U finden. Wir wenden den Gram-Schmidt-Algorithmus auf die gegebene Basis an:

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \overline{w}_1 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{\left\langle w_1, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{w_1, w_1} w_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \qquad \overline{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{5}}{5}\\2\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$$

und ergänzen zu einer Orthogonalbasis $\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3, \overline{w}_4\}$ von $\mathbb{R}^4$, (wobei wir $\overline{w}_3$ und $\overline{w}_4$ nicht explizit berechnen müssen). Wir verwenden die Formel

$$P_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$
$$v = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \overline{w}_i \mapsto \lambda_1 \overline{w}_1 + \lambda_2 \overline{w}_2$$

für die orthogonale Projektion, wobei $\lambda_i = \langle v, \overline{w}_i \rangle$. Für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bekommen wir

$$\lambda_1 = \langle v, \overline{w}_1 \rangle = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\lambda_2 = \langle v, \overline{w}_2 \rangle = 11\frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$P_U(v) = 3\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{w}_1 + 11\frac{\sqrt{5}}{5}\overline{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{11}{5} \\ \frac{22}{5} \end{pmatrix}$$

Theorem 6.6.9 besagt, dass $u = P_U(v)$ das Minimum von $\|u - v\|$ realisiert.

(b) Dies ist auch ein Minimierungsproblem für das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{dx}$$

Der Unterraum $U\{p \in \mathbb{R}[x]_3 \colon p(0) = 0, p'(0) = 0\}$ wird von den Polynomen x^2 und x^3 generiert. Wir wenden Gram-Schmidt an, um eine Orhonormalbasis von U zu bekommen:

$$p_1 = x^2, \qquad \overline{p}_1 = \sqrt{5}x^2$$
$$p_2 = x^3 - \frac{\langle x^3, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle} p_1 = x^3 - \frac{1/6}{1/5}x^3 = x^3 - \frac{5}{6}x^2, \qquad \langle p_2, p_2 \rangle = \frac{1}{252}$$
$$\overline{p}_2 = 6\sqrt{7}\left(x^3 - \frac{5}{6}x^2\right) = 6\sqrt{7}x^3 - 5\sqrt{7}x^2$$

und berechnen für $v(x) = 2 + 3x$ das Polynom

$$P_U(v) = \langle v, \overline{p}_1 \rangle \overline{p}_1 + \langle v, \overline{p}_2 \rangle \overline{p}_2 = \frac{17}{12}\sqrt{5}\overline{p}_1 - \frac{29}{60}\sqrt{7}\overline{p}_2 = \frac{85}{12}x^2 - \frac{203}{10}\left(x^3 - \frac{5}{6}x^2\right) = -\frac{203}{10}x^3 + 24x^2,$$

welches laut Theorem 6.6.9 das Minimum realisiert.

2. Wir betrachten $V = \mathbb{R}[x]_2$ mit Skalarprodukt $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{dx}$. Wir definieren $T \in \mathrm{End}(V)$ durch $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1x$.
   (a) Zeigen Sie, dass T nicht selbst-adjungiert ist.
   (b) Die Darstellungsmatrix von T bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ ist (2)

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $[T]_\mathcal{B} = [T]^\star_\mathcal{B}$, obwohl T nicht selbst-adjungiert ist. Warum ist das kein Widerspruch?

Lösung:

(a) Wir berechnen die zwei Ausdrücke

$$\left\langle T(a_0+a_1x+a_2x^2), b_0+b_1x+b_2x^2\right\rangle = \int_0^1 a_1(b_0x+b_1x^2+b_2x^3)\,\mathrm{dx} = \frac{a_1b_0}{2}+\frac{a_1b_1}{3}+\frac{a_1b_2}{4}$$

$$\left\langle a_0+a_1x+a_2x^2, T(b_0+b_1x+b_2x^2)\right\rangle = \frac{a_0b_1}{2}+\frac{a_1b_1}{3}+\frac{a_2b_1}{4}$$

die im Allgemeinen nicht gleich sind und daher ist $T \neq T^\star$, also nicht selbstadjungiert.

(b) Die Aussage $[T^\star]_{\mathcal{B}} = [T]^\star_{\mathcal{B}}$ gilt nur für Orthonormalbasen $\mathcal{B}$.

3. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass U T-invariant ist genau dann wenn $U^\perp$ $T^\star$-invariant ist.

Lösung:

Sei U so dass $T(U) \subseteq U$. Sei $v \in U^\perp$, das heisst für alle $u' \in U$ gilt $\langle u', v\rangle = 0$. Sei $u \in U$, es gilt

$$\langle u, T^\star(v)\rangle = \langle T(u), v\rangle = \langle u', v\rangle = 0$$

weil $u' = T(u) \in U$. Wir haben gezeigt, dass $T^\star(v) \in U^\perp$ ist.

Für die andere Richtung verwenden wir das obige Resultat. Falls $U^\perp$ invariant unter $T^\star$ ist, dann haben wir dass $(U^\perp)^\perp = U$ invariant unter $(T^\star)^\star = T$ ist. Für $(U^\perp)^\perp = U$ haben wir verwendet, dass U endlichdimensional ist. Adjungierte sind nur in endlichdimensionalen Vektorräumen definiert, da ihre Existenz von Riesz' Representation theorem 6.5.5 abhängt.

4. In dieser Aufgabe verwenden wir vollständige Induktion über die Dimension n, um einen alternativen Beweis des Spektralsatzes über $\mathbb{C}$ für selbstadjungierte Endomorphismen zu geben: (2)

Behauptung: *Ein selbstadjungierter Endomorphismus T in einem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum ist orthogonal diagonalisierbar.*

- *Induktionsanfang:* Beweisen Sie die Behauptung für Vektorräume der Dimension 1.
- *Induktionsannahme:* Sei nun $n > 1$. Wir nehmen an, dass die Behauptung für alle Vektorräume der Dimension $n-1$ gilt.
- *Induktionsschritt:* Dann gilt die Behauptung auch für Vektorräume der Dimension n:
  - Finden Sie einen Eigenwert λ mit Eigenvektor v von T.
  - Zeigen Sie, dass $U = \mathrm{Sp}(v)$ invariant unter T ist.
  - Verwenden Sie Aufgabe 3 und $T = T^\star$ um zu zeigen, dass $U^\perp$ invariant unter T ist.
  - Zeigen Sie, dass $T|_{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$ selbstadjungiert ist.
  - Wenden Sie die Induktionsannahme auf $T|_{U^\perp}$ an, um eine Orthonormalbasis von V zu finden.

Lösung:

Induktionsanfang: In einem Vektorraum der Dimension 1 bildet $\left\{e_1 = \frac{v}{||v||}\right\}$ eine Orthonormalbasis für ein beliebiges Element $v \neq 0$. In dieser Basis ist $[T]_{\{e_1\}}$ eine 1×1 Matrix, also diagonal. Wir haben also T orthogonal diagonalisiert.

Induktionsschritt: Der Endomorphismus T besitzt ein charakteristisches Polynom p_T, das in Linearfaktoren zerfällt, da unser Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist. Sei λ eine der Nullstellen von p_T, dann ist λ ein Eigenwert und es existiert ein Eigenvektor v, so dass $T(v) = \lambda v$.

Wir definieren den eindimensionalen Unterraum $U = \mathrm{Sp}(v)$ und da v ein Eigenvektor von T ist, ist U invariant unter T.

Laut Annahme ist T selbstadjungiert, also $T = T^\star$. Aus Aufgabe 3 folgern wir, dass $U^\perp$ invariant unter $T^\star = T$ ist.

Der Endomorphismus $T|_{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$ ist somit wohldefiniert. Die Berechnung

$$\langle T|_{U^\perp}(u), v\rangle = \langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle = \langle u, T|_{U^\perp}\rangle$$

für $u, v \in U^\perp$ zeigt, dass $T|_{U^\perp}$ selbstadjungiert ist. Da $U^\perp$ Dimension $n-1$ hat, können wir laut Induktionsannahme eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}'$ von $U^\perp$ finden, so dass $[T|_{U^\perp}]_{\mathcal{B}'}$ eine Diagonalmatrix ist. Wir definieren die Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{v}{||v||} \right\} \cup \mathcal{B}'.$$

Da $\langle v, b\rangle = 0$ für alle $b \in \mathcal{B}'$ ist $\mathcal{B}$ ein orthogonales System und laut Vorlesung linear unabhängig. Da die $|\mathcal{B}| = n$ ist $\mathcal{B}$ somit eine Orthonormalbasis. Die Darstellungsmatrix ist von der Form

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & [T|_{U^\perp}]_{\mathcal{B}} \end{array} \right),$$

also eine Diagonalmatrix. Wir haben gezeigt, dass T orthogonal diagonalisiert werden kann.

Dies zeigt per vollständiger Induktion, dass die Behauptung für alle natürlichen Zahlen n stimmt.

5. Für die folgenden Matrizen A finden Sie eine orthogonale Matrix Q, so dass $Q^T AQ$ diagonal ist.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2)

   (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$p_A(x) = \det(A - xI_2) = (1-x)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

mit Eigenwerten 3 und -1. Der Eigenraum zum Eigenwert 3 ist

$$\mathrm{Eig}_3(A) = \mathrm{Ker}(A - 3I_2) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

und zum Eigenwert -1 haben wir:

$$\mathrm{Eig}_{-1}(A) = \mathrm{Ker}(A + I_2) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Somit ist $\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ eine Basis. In diesem Fall sind v_1 und v_2 schon orthogonal, also reicht es, sie richtig zu skalieren, um eine Orthonormalbasis

$$\mathcal{B} = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

zu bekommen. Im allgemeinen kann man Gram-Schmidt anwenden, um eine Orthonormalbasis zu bekommen. Wir schreiben

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

und bekommen

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$p_A(x) = \det(A - xI_3) = x(x+2)(x-3) - 4(x+2) = -x^3 + x^2 + 10x + 8 = -(x-4)(x+1)(x+2)$$

und bemerken, dass die Eigenwerte alle unterschiedlich sind. Wir können die dazugehörigen Eigenräume

$$\begin{aligned}
\mathrm{Eig}_4(A) &= \mathrm{Ker}(A - 4I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \\
\mathrm{Eig}_{-1}(A) &= \mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
\mathrm{Eig}_{-2}(A) &= \mathrm{Ker}(A + 2I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

berechnen. Auch hier sind die Eigenräume orthogonal zueinander und es reicht jeweils ein Element mit Betrag 1 zu finden. Wir definieren

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 2\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

und bekommen

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Für die folgenden Vektorräume V, W und linearen Transformationen $T: V \to W$, berechnen Sie $T^\star(v)$ für den gegebenen Vektor $v \in W$.

(a) $V = W = \mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt, $T = m_A$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und } v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(b) $V = W = \mathbb{C}^2$ mit Standardskalarprodukt, $T = m_B$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und } v = \begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}.$$

(c) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = x - 2y + z$, $v = (5) \in \mathbb{R}^1$.

(d) $V = W = \mathbb{R}[x]_2$ mit $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,\mathrm{dx}$, wobei $T(f) = f' + 3f$, und $v = 4 - 2x$.

Lösung:

(a) Da die Standardbasis bezüglich dem Standardskalarprodukt eine Orthonormalbasis ist, gilt $(m_A)^\star = m_{A^T}$. Wir berechnen also direkt:

$$T^\star(v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

(b) Da die Standardbasis bezüglich dem Standardskalarprodukt eine Orthonormalbasis ist, gilt $(m_B)^\star = m_{\overline{B}^T}$. Wir berechnen also direkt:

$$T^\star(v) = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+i \\ -1-3i \end{pmatrix}.$$

(c) Da die Standardbasis bezüglich dem Standardskalarprodukt eine Orthonormalbasis ist, gilt $(m_A)^\star = m_{\overline{A}^T}$. Wir berechnen also direkt:

$$T^\star(v) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(d) Da wir hier keine Orthonormalbasis haben, verwenden wir die Definition der Adjungierten an. $T^\star(v)$ ist definiert durch

$$\langle T(f), v\rangle = \langle f, T^\star(v)\rangle$$

e für alle $f(x) = a + bx + cx^2$. Wir haben

$$T(f)(x) = f'(x) + 3f(x) = 3a + b + (3b + 2c)x + 3cx^2$$

und somit

$$\langle T(f), v\rangle = 24a + 4b + \frac{16}{3}c.$$

Wenn $T^\star(v) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2$, dann gilt

$$\langle f, T^\star(v)\rangle = 2a\lambda_1 + \frac{2}{3}a\lambda_3 + \frac{2}{3}b\lambda_2 + \frac{2}{3}c\lambda_1 + \frac{2}{5}c\lambda_3.$$

Da die Gleichung für alle f und somit alle a, b, c gilt, können wir schliessen, dass

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_3 &= 24 \\ \frac{2}{3}\lambda_2 &= 4 \\ \frac{2}{3}\lambda_1 + \frac{2}{5}\lambda_3 &= \frac{16}{3}, \end{aligned}$$

wir sehen gleich $\lambda_2 = 6$. Es bleibt noch

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + \lambda_3 &= 36 \\ 5\lambda_1 + 3\lambda_3 &= 40 \end{aligned}$$

was in $\lambda_1 = 17$ und $\lambda_3 = -15$ resultiert. Somit bekommen wir das Resultat

$$T^\star(v) = 17 + 6x - 15x^2.$$

7. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Beweisen oder widerlegen Sie:
   (a) $TT^\star$ ist selbstadjungiert.
   (b) $T + T^\star$ ist selbstadjungiert.
   (c) $T - T^\star$ ist selbstadjungiert.

Lösung:

Wir verwenden die Rechenregeln aus Lemma 7.1.3.

(a) Wir haben $(TT^\star)^\star = (T^\star)^\star T^\star = TT^\star$, also ist $TT^\star$ selbstadjungiert.

(b) Wir haben $(T + T^\star)^\star = T^\star + (T^\star)^\star = T^\star + T = T + T^\star$, also ist $T + T^\star$ selbstadjungiert.

(c) Es gilt $(T - T^\star)^\star = T - T^\star$ genau dann wenn $T^\star - T = T - T^\star$ genau dann wenn $2T^\star = 2T^\star$ genau dann wenn $T = T^\star$. Es sind aber nicht alle Endomorphismen selbstadjungiert, deshalt ist auch $T - T^\star$ nicht zwingend selbstadjungiert.

8. Sei $V = W \oplus W^\perp$ und P_W die orthogonale Projektion auf W. Zeigen Sie, dass $P_W = P_W^\star$.

Lösung:

Seien $u + u^\perp, v + v^\perp \in W \oplus W^\perp$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle P_W(u + u^\perp), v + v^\perp\rangle &= \langle u, v + v^\perp\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, v^\perp\rangle = 0 + \langle u, v\rangle + 0 \\ &= \langle u^\perp, v\rangle + \langle u, v\rangle = \langle u + u^\perp, v\rangle = \langle u + u^\perp, P_W(v + v^\perp)\rangle \end{aligned}$$

da $\langle u, v^\perp\rangle = 0 = \langle u^\perp, v\rangle$. Somit erfüllt P_W die definierende Eigenschaft für die Adjungierte und wir haben $P_W^\star = P_W$.