Serie 7

Adjungierte, Hauptachsentransformation und Repetition
Abgabe 19. 4. 2021

Hinweis: Aufgaben 1 und 3 sind Aufgaben über die Adjungierte und in Aufgabe 2 könnne sie die Hauptachsentransformation an einem Beispiel ausprobieren. Die Aufgaben 4, 5, 6 und 7 stammen aus früheren Prüfungen und behandeln den ganzen bisherigen Stoff aus der Linearen Algebra II. In den Aufgaben 2 und 6(d) können Sie Punkte bekommen.

1. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Sei $y, z \in V$ und $T(x) = \langle x, y\rangle z$ für $x \in V$. Zeigen Sie
   (a) Falls $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ für alle $x \in V$, dann gilt $y = z$.
   (b) $T\colon V \to V$ ist linear.
   (c) Finden und beweisen Sie eine Formel für $T^\star$, die ähnlich zu $T(x) = \langle x, y\rangle z$ ist.

   Lösung:
   (a) Falls $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$, dann gilt
   $$\langle x, y - z\rangle = 0$$
   und aus der positiv Definitheit folgt für $x = y - z$, dass $y - z = 0$. Somit gilt $y = z$.

   (b) Sei $x, x' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{F}$. Dann gilt
   $$T(\lambda x + x') = \langle \lambda x + x', y\rangle z = \lambda\langle x, y\rangle z + \langle x', y\rangle = \lambda T(x) + T(x')$$
   weil $\langle\cdot,\cdot\rangle$ im ersten Eintrag linear ist.

   (c) Wir haben
   $$\begin{aligned}\langle T(x), x'\rangle &= \langle x, T^\star(x')\rangle\\ \langle\langle x, y\rangle z, x'\rangle &= \langle x, T^\star(x')\rangle\\ \langle x, y\rangle\langle z, x'\rangle &= \langle x, T^\star(x')\rangle\\ \langle x, \overline{\langle z, x'\rangle} y\rangle &= \langle x, T^\star(x')\rangle\\ \langle x, \langle x', z\rangle y\rangle &= \langle x, T^\star(x')\rangle\end{aligned}$$
   und es folgt aus (a), dass $T^\star(x') = \langle x', z\rangle y$.

2. Betrachten Sie den Kegelschnitt in $\mathbb{R}^2$, der durch die Gleichung $x^2 + 2xy = 1$ gegeben ist. Finden Sie eine symmetrische Matrix A, so dass die Gleichung als $v^T A v = 1$ für $v^T = (x, y)$ geschrieben werden kann. Diagonalisieren Sie A orthogonal. Schreiben Sie eine Gleichung ohne gemischten Term xy in neuen Koordinaten $\tilde{x}, \tilde{y}$ hin, und bestimmen Sie, ob es sich um eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel handelt. (2)

   Lösung:
   Für die Matrix
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   kann die Gleichung als $\langle v, v\rangle_A = 1$ geschrieben werden. Wir möchten nun A diagonalisieren. Wir betrachten das charakteristische Polynom
   $$p_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - x - 1$$

und bestimmen die Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

und wir kürzen ab $x_1 = \varphi, x_2 = -\varphi^{-1}$, wobei φ der goldene Schnitt ist. Das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren $p_A(x) = (x-\varphi)(x+\varphi^{-1})$, also ist A diagonalisierbar. Wir berechnen die Eigenräume

$$\mathrm{Eig}_A(\varphi) = \mathrm{Ker}(A - \varphi I_2) = \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$\mathrm{Eig}_A(-\varphi^{-1}) = \mathrm{Ker}(A + \varphi^{-1} I_2) = \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix} -\varphi^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Diese Eigenvektoren sind bereits orthogonal und wir müssen sie nur noch skalieren um eine Orthonormalbasis zu bekommen.

$$\overline{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{\varphi^2+1}} \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\overline{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{\varphi^{-2}+1}} \begin{pmatrix} -\varphi^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix Q mit den Spaltenvektoren $\overline{w}_1, \overline{w}_2$ ist jetzt orthogonal und erfüllt

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} = D.$$

Die Gleichung $v^T A v = 1$ ist äquivalent zu $v^T Q D Q^T v = 1$, wir definieren also

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = Q^T v = \begin{pmatrix} \frac{\varphi x + y}{\sqrt{\varphi^2+1}} \\ \frac{-\varphi^{-1} x + y}{\sqrt{\varphi^{-2}+1}} \end{pmatrix}$$

und bekommen die neue Gleichung $\varphi \tilde{x}^2 - \varphi^{-1}\tilde{y}^2 = 1$. Aus dieser Gleichung erkennt man, dass es sich um eine Hyperbel handelt.

3. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine positiv definite hermitesche Matrix. Wir betrachten das Skalarprodukt

$$(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle_A = v^T A \overline{w}$$

auf $V = \mathbb{C}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass jede positiv definite Matrix invertierbar ist.

(b) Sei $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Für m_B schreiben wir die Adjungierte $(m_B)^\star = m_C$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$. Finden Sie C.

(c) Geben Sie eine Bedingung an, die beschreibt ob m_B normal bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ ist.

(d) Was könnte die Bedingung sein, die beschreibt, dass m_B unitär bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ ist?

Lösung:

(a) Wir schreiben $A = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$. Wir zeigen die Kontraposition. Angenommen A ist nicht invertierbar, dann sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig, das heisst es gibt $\lambda_i \in \mathbb{C}$ (nicht alle Null) so dass $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$. Wir definieren jetzt

$$\overline{w} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \neq 0$$

und bekommen $\langle w, w\rangle_A = w^T A\overline{w} = w^T 0 = 0$. Dann ist A nicht positiv definit.

(b) Für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$ haben wir

$$\langle Bv, w\rangle_A = v^T B^T A\overline{w} \stackrel{!}{=} v^T A\overline{C}\overline{w} = \langle v, Cw\rangle_A$$

also

$$C = \overline{A^{-1}B^T A} = \overline{A}^{-1}\overline{B}^T\overline{A}$$

wobei wir verwendet haben, dass A invertierbar ist.

(c) Ein Endomorphismus m_B ist normal, genau dann wenn $m_B \circ (m_B)^\star = (m_B)^\star \circ m_B$ gilt, das heisst genau dann wenn

$$B\overline{A}^{-1}\overline{B}^T\overline{A} = \overline{A}^{-1}\overline{B}^T\overline{A}B$$

was auch als

$$\overline{B}A^{-1}B^T A = A^{-1}B^T A\overline{B}$$

geschrieben werden kann.

(d) Bezüglich des Standardprodukts ist m_B unitär genau dann wenn $\langle Bv, Bw\rangle = \langle v, w\rangle$ gilt. Wir verwenden diese Definition, jedoch mit dem neuen Skalarprodukt. Die Gleichung

$$\langle Bv, Bw\rangle_A = \langle v, w\rangle_A$$

führt zu

$$v^T B^T A\overline{B}\overline{w} = v^T A\overline{w},$$

also

$$B^T A\overline{B} = A.$$

4. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine Matrix. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_A \colon M_{n\times n}(\mathbb{C}) &\to M_{n\times n}(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto AX - XA \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass ad_A eine lineare Abbildung ist.
(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(ABC) = \mathrm{Spur}(BCA)$ für alle $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.
(c) Zeigen Sie, dass die Adjungierte

$$\mathrm{ad}_A^\star = \mathrm{ad}_{\overline{A}^T}$$

begzüglich dem Skalarprodukt $\langle X, Y\rangle = \mathrm{Spur}(X\overline{Y}^T)$ erfüllt.

Lösung:

(a) Sei $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{C}), \lambda \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\mathrm{ad}_A(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) - (\lambda X + Y)A = \lambda(AX - XA) + AY - YA = \lambda\,\mathrm{ad}_A(X) + \mathrm{ad}_A(Y).$$

(b) Wir schreiben $A = (a_{ij}), B = (b_{jk}), C = (c_{kl})$ und berechnen

$$\begin{aligned} \mathrm{Spur}(BCA) = \mathrm{Spur}\left(\left(\sum_{k,l=1}^n b_{ik}c_{kl}a_{lj}\right)_{ij}\right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k,l=1}^n b_{ik}c_{kl}a_{li} = \sum_{i,j,k=1}^n b_{jk}c_{ki}a_{ij} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n a_{ij}b_{jk}c_{ki} = \mathrm{Spur}\left(\left(\sum_{j,k=1}^n a_{ij}b_{jk}c_{kl}\right)_{il}\right) = \mathrm{Spur}(ABC). \end{aligned}$$

(c) Wir verwenden die Linearität der Spur und zeigen

$$\langle X, \mathrm{ad}_{\overline{A}^T}(Y)\rangle = \mathrm{Spur}\left(X\overline{\left(\overline{A}^T Y - Y\overline{A}^T\right)}^T\right) = \mathrm{Spur}(X(\overline{Y}^T A - A\overline{Y}^T)) = \mathrm{Spur}(X\overline{Y}^T A) - \mathrm{Spur}(XA\overline{Y}^T)$$
$$\overset{(b)}{=} \mathrm{Spur}(AX\overline{Y}^T) - \mathrm{Spur}(XA\overline{Y}^T) = \mathrm{Spur}((AX - XA)\overline{Y}^T) = \langle \mathrm{ad}_A(X), Y\rangle.$$

5. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
   (a) Sei $S \in \mathrm{End}(V)$, so dass $\langle Sv, v\rangle = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass $S = 0$ ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $T \in \mathrm{End}(V)$ genau dann selbstandjungiert ist, wenn die Adjungierte von T existiert und für alle $v \in V$ gilt
   $$\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$$
   für alle $v \in V$.

Lösung:

(a) Sei $v, w \in V$ beliebig. Wir berechnen

$$0 = \langle S(v + iw), v + iw\rangle = \langle iSw, v\rangle + \langle Sv, iw\rangle = i\langle Sw, v\rangle - i\langle Sv, w\rangle$$
$$0 = \langle S(v + w), v + w\rangle = \langle Sw, v\rangle + \langle Sv, w\rangle$$

und folglich

$$\langle Sv, w\rangle = \langle Sw, v\rangle = -\langle Sv, w\rangle$$

und somit $\langle Sv, w\rangle = 0$ für beliebige $v, w \in V$. Insbesondere gilt also für alle $v \in V$, dass $\langle Sv, Sv\rangle = 0$ und somit ist $Sv = 0$ wegen der positv Definitheit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(b) Falls T selbstadjungiert ist, dann existiert die Adjungierte und es gilt

$$\langle Tv, v\rangle = \langle v, Tv\rangle = \overline{\langle Tv, v\rangle},$$

also $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$.

Falls hingegen $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$, dann gilt

$$\langle (T^\star - T)v, v\rangle = \langle T^\star v, v\rangle - \langle Tv, v\rangle = \langle v, Tv\rangle - \langle Tv, v\rangle = \overline{\langle Tv, v\rangle} - \langle Tv, v\rangle = 0$$

und wir können die Behauptung aus Teilaufgabe (a) schliessen.

6. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums V mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so dass es ein $n \geq 1$ gibt mit $T^n = \mathrm{Id}_V$ gilt.
   (a) Zeigen Sie, dass durch
   $$\langle\langle v, w\rangle\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \langle T^i(v), T^i(w)\rangle$$
   ein weiteres Skalarprodukt auf V definiert ist.
   (b) Welche Eigenschaft hat T bezüglich $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$? Folgern Sie daraus, dass T diagonalisierbar ist.
   (c) Zeigen Sie mit Hilfe des Minimalpolynoms, dass T diagonalisierbar ist.
   (d) Betrachten Sie den Fall $V = \mathbb{C}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Bestimmen Sie $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für den Endomorphismus $T = m_A$ für die Matrix (2)
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   und ein geeignetes $n \geq 1$.

Lösung:

(a) Die Sesquilinearität und Hermitesch-heit folgen direkt aus der Sesquilinearität und Hermitesch-heit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sei jetzt $v \in V \setminus \{0\}$. Wir bemerken, dass $T^i v \neq 0$, da sonst $T^n v = 0$ wäre. Somit folgt aus der positiv Definitheit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$, dass $\langle\langle v, v\rangle\rangle$ eine Summe aus positiven Zahlen, also positiv ist. Das zeigt die positiv Definitheit.

(b) Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned}\langle\langle Tv, w\rangle\rangle &= \sum_{i=0}^{n-1}\langle T^{i+1}v, T^i w\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle T^i v, T^{i-1}w\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle T^i v, T^{n+i-1}w\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\langle T^i v, T^i(T^{n-1}w)\rangle = \langle\langle v, T^{n-1}w\cdot\rangle\rangle\end{aligned}$$

und somit $T^\star = T^{n-1}$ gilt. Somit kommutiert T mit $T^\star$, das heisst T ist normal und somit können wir mit dem Spektralsatz über $\mathbb{C}$ schliessen, dass T orthogonal diagonalisierbar ist.

(c) Wir haben $T^n = \mathrm{Id}_V$, also teilt das Minimalpolynom $x^n - 1$. Die Nullstellen von $x^n - 1$ sind komplexe Wurzeln von 1 und existieren und sind alle unterschiedlich. Somit zerfällt auch das Minimalpolynom in paarweise unterschiedliche einfache Linearfaktoren und folglich ist T diagonalisierbar.

(d) Wir berechnen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und bemerken, dass $A^6 = I_2$ (also $n = 6$) und

$$A^4 = -A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^5 = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$\langle\langle v, w\rangle\rangle = \sum_{i=0}^{5}\langle A^i v, A^i w\rangle = \sum_{i=0}^{5}(A^i v)^T\overline{A^i w} = \sum_{i=0}^{5} v^T (A^i)^T \overline{A^i}\overline{w} = v^T B\overline{w} = \langle v, w\rangle_B$$

mit $B = \sum_{i=0}^{5}(A^i)^T\overline{A}^i = \ldots = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$.

Um eine Orthonormalbasis zu bestimmen betrachten wir das charakteristische Polynom

$$p_T(x) = p_A(x) = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ finden wir durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(A - \lambda I_2)v = 0$ mit dem Resultat $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}\right\rangle\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{\lambda} \end{pmatrix} = \ldots = 12.$$

Also bilden die Vektoren $\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm \end{pmatrix}$ für $\lambda_\pm = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ eine Basis aus normierten Eigenvektoren (bezüglich $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$). Diese sind bereits orthogonal bezüglich $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$, da es sich um Eigenvektoren eines normalen Operators handelt. Sie bilden also die gesuchte Orthonormalbasis.

7. Wir betrachten den Vektorraum $V_n = \mathbb{C}[x]_n$. Sei

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(k)\overline{g(k)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist.

(b) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich $\langle \cdot, \cdot\rangle$ für den Spezialfall $n = 2$ auf die Basis $\{1, x, x^2\}$ von V_2 an.

(c) Welche Eigenschaft besitzt der Endomorphismus

$$\varphi\colon f(x) \mapsto f(n-x)$$

von V_n bezüglich $\langle \cdot, \cdot\rangle$? Folgern Sie daraus, dass φ diagonalisierbar ist.

Lösung:

(a) Wir zeigen die Sesquilinearität: Sei $f, g, h \in V_n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir rechnen

$$\langle \lambda f + g, h\rangle = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(\lambda f(k) + g(k))\overline{h(k)} = \lambda\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(k)\overline{h(k)} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g(k)\overline{h(k)} = \lambda\langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$$

$$\langle f, \lambda g + h\rangle = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(k)\overline{\lambda g(k) + h(k)} = \overline{\lambda}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(k)\overline{g(k)} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(k)\overline{h(k)} = \overline{\lambda}\langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$$

Die Bilinearform ist hermitesch, da

$$\overline{\langle g, f\rangle} = \overline{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g(k)\overline{f(k)}} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(k)\overline{g(k)} = \langle f, g\rangle.$$

Nun gilt für $f \in V_n$

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(k)\overline{f(k)} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|f(k)\|^2 \geq 0$$

und falls dies gleich Null ist, dann muss $f(k) = 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$. Ein nichttriviales Polynom mit Grad $\leq n$ hat aber höchstens $\leq n$ Nullstellen, also ist $f(x) = 0$.

(b) Es gilt $\langle 1, 1\rangle = \frac{1}{3}(1+1+1) = 1$, also ist das Element $v_1 = 1 \in V_2$ bereits normiert. Wir setzen nun

$$\tilde{v}_2 = x - \langle x, v_1\rangle v_1 = x - \frac{1}{3}(0+1+2)\cdot 1 = x - 1$$

und wegen $\langle x-1, x-1\rangle = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}(k-1)^2 = \frac{1}{3}(1+0+1) = \frac{2}{3}$ ist der zweite normierte Vektor gleich

$$v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\sqrt{|\tilde{v}_2, \tilde{v}_2|}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(x-1).$$

Wir setzen

$$\begin{aligned}\tilde{v}_3 &= x^2 - \langle x^2, v_1\rangle v_1 - \langle x^2, v_2\rangle v_2 \\ &= x^2 - \frac{1}{3}(0+1+4)\cdot 1 - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}k^2(k-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(x-1) \\ &= x^2 - 2x + \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Wegen

$$\|\tilde{v}_3\|^2 = \langle \tilde{v}_3, \tilde{v}_3 \rangle = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2} \left(x^2 - 2x + \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{2}{9}$$

ist der dritte gesuchte Vektor gleich

$$v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3x^2 - 6x + 1).$$

(c) Für alle $f, g \in V_n$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(f), g \rangle &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \varphi(f)(k)\overline{g(k)} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(n-k)\overline{g(k)} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(j)\overline{g(n-j)} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(j)\overline{\varphi(g)(j)} \\
&= \langle f, \varphi(g) \rangle
\end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $j := n - k$ benutzt haben. Also ist φ selbstadjungiert. Nach dem Spektralsatz ist φ daher diagonalisierbar.