Serie 8

Othogonale Abbildungen, Singulärwertzerlegung und Bilinearformen
Abgabe 26. 4. 2021

Hinweis: Die Aufgaben 1 und 2 behandeln orthogonale Abbildungen. Bei den Aufgaben 3 - 6 geht es um die Singulärwertzerlegung. Aufgabe 7 enthält Beispiele von Bilinearformen und in Aufgabe 8 kann man sehen, wie orthogonale Abbildungen für Bilinearformen verallgemeinert werden können. Mit $\mathbb{F}$ ist weiterhin $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gemeint und in den Aufgaben 1 - 6 ist V immer ein Vektorraum mit Skalarprodukt. In den Aufgaben 1, 4, 5(b) und 7(c) können Sie je zwei Punkte bekommen.

1. Seien $T_1, T_2 \in \mathrm{End}(\mathbb{F}^3)$ normal, so dass beide $2, 5$ und 7 als Eigenwerte haben. Zeigen Sie, dass es einen orthogonalen/unitären Endomorphismus $S \in \mathrm{End}(\mathbb{F}^3)$ gibt, so dass $T_1 = S^\star T_2 S$. (2)

   Lösung:

   Sei $i \in \{1, 2\}$. Da T_i normal ist und die Eigenwerte reell sind, ist T_i orthogonal diagonalisierbar (Für $\mathbb{C}$ reicht es, dass T_i normal sind, für $\mathbb{R}$ müssen wir reelle Eigenwerte fordern, siehe Korollar 7.2.7 im Skript). Also gibt es einen orthogonalen Endomorphismus S_i, so dass $T_i = S_i^\star \operatorname{Diag}(2, 5, 7) S_i$. Der gesuchte orthogonale Endomorphismus ist nun

$$S = S_2^\star S_1.$$

2. Sei V der komplexe Vektorraum aller stetigen komplexen Funktionen auf $[0, 1]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{dt}\,.$$

   Für $h \in V$ sei $T_h \colon V \to V$ durch $T_h(f) = hf$ definiert. Zeigen Sie, dass T_h eine unitäre Abbildung ist genau dann wenn $|h(t)| = 1$ für alle $t \in [0, 1]$.

   Lösung:

   Sei zuerst $h \in V$ mit $|h(t)| = \sqrt{h(t)\overline{h}(t)} = 1$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\langle T_h f, T_h g\rangle = \int_0^1 f(t)h(t)\overline{g(t)h(t)}\,\mathrm{dt} = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}h(t)\overline{h(t)}\,\mathrm{dt} = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{dt} = \langle f, g\rangle$$

   und somit ist T_h orthogonal.

   Für die Kontraposition sei $h \in V$, so dass es ein $t_0 \in [0, 1]$ gibt, so dass $|h(t_0)| \neq 1$. Ohne Beachtung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $|h(t_0)| > 1$ gilt. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es nun wegen der Stetigkeit ein $\delta > 0$ so dass auf dem Interval $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0, 1]$ gilt:

$$\forall t \in I \colon |h(t)| \geq |h(t_0)| - \varepsilon$$

   Für kleine $\varepsilon > 0$ können wir garantieren, dass für alle $t \in I$ gilt $|h(t)| \geq k > 1$ für eine Konstante k.

   Wir zeigen jetzt, dass T_h nicht orthogonal ist. Dazu betrachten wir Funktionen $f, g \in V \setminus \{0\}$, so dass $f(t) = g(t) = 0$ für alle $t \in [0, 1] \setminus I$. Wir möchten auch, dass $\langle f, g\rangle \neq 0$, was zum Beispiel für reelle $g = f \in V \setminus \{0\}$ gegeben ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\langle T_h f, T_h g\rangle &= \int_0^1 f(t)h(t)\overline{g(t)h(t)}\,\mathrm{dt} = \int_I f(t)\overline{g(t)}|h(t)|^2\,\mathrm{dt} \geq \int_I f(t)\overline{g(t)}k^2\,\mathrm{dt} \\ &= k^2 \int_I f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{dt} = k^2 \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{dt} = k^2\langle f, g\rangle > \langle f, g\rangle.\end{aligned}$$

   Also ist T_h nicht orthogonal.

3. Finden Sie einen Endomorphismus $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$, so dass 0 der einzige Eigenwert ist, T aber 0 und 5 als Singulärwerte hat.

Lösung:

Über $\mathbb{C}$ ist jeder Endomorphismus orthogonal trigonalisierbar, damit die Eigenwerte und Singulärwerte nicht übereinstimmen sollte T nicht diagonalisierbar sein. Sei also $T = m_A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir berechnen die Singulärwertzerlegung (siehe Skript, Beweis Satz 7.5.2.):
Wir berechnen $TT^\star = m_B$ wobei

$$B = \begin{pmatrix} a\overline{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

und da B bereits diagonal ist, ist

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $TT^\star$. Die Singulärwerte sind $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{a\overline{a}} = |a|$ und $\sigma_2 = 0$. Ein orthogonales System von Eigenvektoren von $T^\star T$ ist gegeben durch

$$T^\star w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{a} \end{pmatrix}, T^\star w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das normiert und beliebig zu einer Orthonormalbasis

$$v_1 = \frac{T^\star w_1}{\|T^\star w_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\overline{a}}{|a|} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aus Eigenvektoren von $T^\star T$ ergänzt werden kann. Wir haben jetzt die Singulärwertzerlegung

$$A = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\overline{a}}{|a|} & 0 \end{pmatrix}}^T = \begin{pmatrix} |a| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{|a|} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit 5 ein Singulärwert ist, muss also $|a| = 5$ gelten, zum Beispiel $a = 5$.

4. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und s ein Singulärwert von T. Zeigen Sie, dass es einen Vektor $v \in V$ gibt, so dass $\|v\| = 1$ und $\|Tv\| = s$. (2)

Lösung:

Die Singulärwertzerlegung besagt, dass es Orthonormalbasen $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_n$ von V gibt, so dass $T(v_i) = \sigma_i w_i$ gilt. Sei i also so, dass $s = \sigma_i$ der Singulärwert ist. Dann nehmen wir $v = v_i$ und es gilt $\|v\| = 1$ und $\|Tv\| = s\|w_i\| = s$.

5. Finden Sie die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma\overline{V}^T$ von

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

(b) (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{C}).$$

Lösung:

Wir folgen dem Beweis von Satz 7.5.2:

(a) Es gilt

$$AA^\star = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

was bereits diagonal ist, also können wir die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aus Eigenvektoren für $AA^\star$ wählen. Dann ist

$$A^\star v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}, A^\star v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein orthogonales System, das zu einer Orthonormalbasis

$$w_1 = \frac{A^\star v_1}{\|A^\star v_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aus Eigenvektoren von $A^\star A$ skaliert werden kann. Die Singularwerte sind $\sigma_1 = \sqrt{16} = 4, \sigma_2 = 1$ und wir haben die Singularwertzerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}^T.$$

(b) Es gilt

$$AA^\star = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

was bereits diagonal ist, also können wir die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aus Eigenvektoren für $AA^\star$ wählen. Dann ist

$$A^\star v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A^\star v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein orthogonales System, das zu einer Orthonormalbasis

$$w_1 = \frac{A^\star v_1}{\|A^\star v_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, w_2 = \frac{A^\star v_2}{\|A^\star v_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aus Eigenvektoren von $A^\star A$ skaliert werden kann. Die Singularwerte sind $\sigma_1 = \sqrt{2}$ und $\sigma_2 = \sqrt{2}$. Wir haben die Singularwertzerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}}^T.$$

6. Beweisen Sie die folgende Behauptung über $T \in \mathrm{End}(V)$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Satzes über die Singularwertzerlgeung:

   Behauptung: Die Eigenwerte von $TT^\star$ und $T^\star T$ sind gleich.

   Lösung:

   Wenn λ ein Eigenwert von $TT^\star$ ist, dann gibt es einen Eigenvektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit $TT^\star v = \lambda v$. Wir sehen, dass $T^\star T(T^\star v) = T^\star \lambda v = \lambda(T^\star v)$, also ist $T^\star v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, angenommen es gilt $T^\star v \neq 0$

   Falls jedoch $T^\star v = 0$, dann hat $\mathrm{Ker}(T^\star)$ mindestens eine Dimension. Es gilt $\dim(\mathrm{Bild}(T^\star)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Ker}(T^\star)) < \dim(V)$, aber auch $\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(T^\star)) + \dim(\mathrm{Bild}(T^\star)^\perp)$. Also ist $\dim(\mathrm{Bild}(T^\star)^\perp \geq 1$. Bemerke, dass wir hier verwendet haben, dass $T \in \mathrm{End}(V)$. Wir schliessen, dass es ein $w \in \mathrm{Bild}(T^\star)^\perp \setminus \{0\} = \mathrm{Ker}(T) \setminus \{0\}$ gibt (Lemma 7.1.5 im Skript). Es gilt $T^\star T w = T^\star 0 = 0$ und somit ist w ein Eigenvektor von $T^\star T$ zum Eigenwert 0.

   Man zeigt auf die gleiche Art, dass jeder Eigenwert von $T^\star T$ auch ein Eigenwert von $TT^\star$ ist.

   Alternativ verwenden wir den Satz über die Singularwertzerlegung:

   Seien U, V orthogonale Endomorphismen, so dass $T = UD_rV^\star$. Dann gilt

   $$\begin{aligned} TT^\star &= UD_rD_r^\star U^\star \\ T^\star T &= VD_r^\star D_r V^\star \end{aligned}$$

   und wir bemerken, dass $D_r = D_r^\star$. Basiswechsel beeinflussen die Eigenwerte nicht, also haben $TT^\star$ und $T^\star T$ die gleichen Eigenwerte.

   Bemerkung, wenn $T\colon V \to W$ kein Endomorphismus wäre, dann könnte es vorkommen, dass 0 nur Eigenert von einem von $T^\star T$ oder $TT^\star$ ist.

7. Entscheide für die folgenden Funktionen H, ob sie Bilinearformen sind:

   (a) Sei $V = C([0,1])$ der Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf dem Interval $[0,1]$. Für $f, g \in V$ definere
   $$H(f,g) := \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

   (b) Sei V ein $\mathbb{F}$-Vektorraum und J eine nichttriviale Bilinearform. Definiere
   $$H(x,y) = [J(x,y)]^2$$
   für $x, y \in V$.

   (c) Sei $H\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, H(t_1, t_2) = t_1 + 2t_2$. (2)

   (d) Sei $H\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (v,w) \mapsto \det(v,w)$, die Determinante der 2×2-Matrix mit v, w als Zeilen.

   (e) Sei V ein Euklidischer Vektorraum und $H\colon V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch $H(x,y) = \langle x, y \rangle$ für $x, y \in V$.

   (f) Sei V ein unitärer Vektorraum und $H\colon V \times V \to \mathbb{C}$ definiert durch $H(x,y) = \langle x, y \rangle$ für $x, y \in V$.

   Lösung:

   (a) Ja, H ist eine Bilinearform, da das Integral linear ist und das Distributivgesetz gilt.

   (b) Nein, sei $v, w \in V$, so dass $J(v,w) \neq 0$. Dann gilt
   $$H(2v,w) = J(2v,w)^2 = (2J(v,w))^2 = 4(J(v,w)^2 = 4H(v,w) \neq 2H(v,w).$$

   (c) Nein, $H(2,1) = 4 \neq 6 = 2H(1,1)$.

(d) Ja, sei $v = (a, c), v' = (a', c'), w = (b, d) \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $H(\lambda v + v', w) = (\lambda a + a')d - b(\lambda c + c') = \lambda(ad - bc) + a'd - bc' = \lambda H(v, w) + H(v', w)$, woraus die Linearität im ersten Eintrag folgt. Die Linearität im zweiten Eintrag ist analog.

(e) Ja, Skalarprodukte in Euklidischen Vektorräumen sind per Definition Bilinear.

(f) Nein, Skalarprodukte in unitären Vektorräumen sind per Definition Sesquilinear, nicht bilinear, die Multiplikation mit einem komplexen Skalar ist nicht das selbe innerhalb von H wie ausserhalb von H.

8. Wir betrachten Gruppen von Matrizen, die verschiedene Bilinearformen erhalten. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, sei $B_A\colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ die Bilinearform definiert durch

$$B_A(v, w) = v^T A w \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

Für eine Bilinearform $B\colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definieren wir

$$\mathrm{O}_B := \mathrm{O}_B(n) := \{Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})\colon B(Qv, Qw) = B(v, w) \text{ für alle } v, w \in \mathbb{K}^n\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}_{B_A}(n) = \big\{Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})\colon Q^T A Q = A\big\}$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für $E, F \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ gilt: $\forall v, w \in \mathbb{K}^n\colon v^T E w = v^T F w \iff E = F$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}_{B_A}(n)$ mit Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

(c) Sei jetzt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $A = I_n$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}_{B_{I_n}}(n)$ die Einheitssphäre

$$\mathbb{S}_{n-1} = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\big\}$$

erhält, das heisst $\forall Q \in O_{B_{I_n}}(n)\colon Q(\mathbb{S}_{n-1}) \subseteq \mathbb{S}_{n-1}$. Wie haben wir die Gruppe $\mathrm{O}_{B_{I_n}}(n)$ auch noch genannt?

(d) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit $p + q = n$ sei

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $B_{I_{p,q}}$ eine symmetrische Bilinearform, aber kein Skalarprodukt ist.

(e) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $p = 1, q = 3, n = p + q = 4$. Die Gruppe der Lorenz-Transformationen ist $\mathrm{O}_{I_{1,3}}(4)$ für $I_{1,3}$ wie in (d). Der Viererimpuls eines Teilchens in der speziellen Relativitätstheorie ist gegeben durch

$$v = \begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Zeigen Sie, dass die Ruhemasse

$$m_0 := \sqrt{E^2 - \|p\|^2}$$

(wobei $\|p\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$) invariant unter Lorenz-Transformationen ist.

(f) Für gerade $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ ist die Gruppe der symplektischen Matrizen $\mathrm{Sp}(2k) := \mathrm{O}_\Omega(n)$ gegeben durch

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Fläche eines Parallelograms, das durch die Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ aufgespannt wird ist $|\det(v_1, v_2)|$. Zeigen Sie, dass die Fläche von solchen Parallelogrammen von Elementen in $\mathrm{Sp}(2)$ erhalten bleibt.

(g) Zeigen Sie, dass für $n = 2k > 2$

$$\mathrm{Sp}(2k) \neq \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) := \{Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})\colon \det(Q) = 1\}.$$

Lösung:

(a) Wir zeigen zuerst den Hinweis:

Wenn für Matrizen $A = B$ gilt, dann gilt offensichtlich auch $v^T Aw = v^T Bw$ für alle $v, w \in V = \mathbb{K}^n$. Umgekehrt wählen wir $v = e_j, w = e_i$ und bekommen $(A)_{ij} = v^T Aw = v^T Bw = (B)_{ij}$ und wenn zwei Matrizen in allen Einträgen gleich sind, dann sind sie insgesammt gleich.

Die Elemente $Q \in \mathrm{O}_{B_A}$ erfüllen

$$v^T Q^T AQw = (Qv)^T AQw = B_A(Qv, Qw) = B_A(v, w) = v^T Aw$$

für alle $v, w \in V$ genau dann wenn gilt $Q^T AQ = A$.

(b) Wir zeigen, dass O_{B_A} eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ ist.

- Die Idenität ist in O_{B_A}: $I_n A I_n = A$.
- Sei $Q, R \in \mathrm{O}_{B_A}$. Wir müssen zeigen, dass $QR \in \mathrm{O}_{B_A}$. Wenn $Q^T AQ = A = R^T AR$ gilt, dann auch $(QR)^T AQR = R^T QAQR = R^T AR = A$.
- Sei $Q \in \mathrm{O}_{B_A}$. Wir müssen zeigen, dass $Q^{-1} \in \mathrm{O}_{B_A}$: Aus $Q^T AQ = A$ folgt $A = (Q^{-1})^T AQ$ und somit $Q^{-1} \in \mathrm{O}_{B_A}$.

(c) Für $A = I_n$ ist B_A das Standardskalarprodukt und $\mathrm{O}_{B_A} = O(n)$ die Gruppe der orthogonalen Matrizen. Wir wissen, dass sie die Norm $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ erhält, also auch die Einheitssphäre.

(d) Bilinearität von B_A folgt aus der Linearität der Matrixmultiplikation für alle Matrizen A. Wir müssen noch die Symmetrie zeigen. Sei $v = (v_1, \ldots, v_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$B_{I_{p,q}}(v, w) = \sum_{i=1}^{p} v_i w_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} v_i w_i = \sum_{i=1}^{p} w_i v_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} w_i v_i = B_{I_{p,q}}(w, v).$$

Für $v = e_n$ gilt die Positiviät nicht: $B_{I_{p,q}}(v, v) = -1 \cdot 1 = -1 < 0$.

(e) Wir Bemerken, dass gilt $\sqrt{B_{I_{p,q}}(v, v)} = m_0$. Da $\mathrm{O}_{B_{I_{p,q}}}$ die Bilinearform $B_{I_{p,q}}$ erhält, ist auch m_0 erhalten.

(f) Wir bemerken, dass $B_\Omega(v, q) = \det(v, w)$ gerade die Bilinearform aus der Aufgabe 7(d) ist. Matrizen in $\mathrm{Sp}(2)$ erhalten die Determinante, also auch den Betrag der Determinante.

(g) Für die Block-Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2)$$

gilt laut (a) $Q^T \Omega Q = \Omega$, also

$$\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T C - C^T A & A^T D - C^T B \\ B^T C - D^T A & B^T D - D^T B \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$$

Aus $A^T D - C^T B = I_k$ folgt, dass jede Matrix in $\mathrm{Sp}(2k)$ in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ ist, aber zum Beispiel die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(4, \mathbb{K})$$

erfüllt $A^T D - C^T B = A \neq I_2$ und ist somit nicht in $\mathrm{Sp}(4)$. Um ein Beispiel für grössere n zu finden, kann man geeignet mit 1-en und 0-en auffüllen.