Serie 9

Bilinearformen und quadratische Formen
Abgabe 3. 5. 2021

Hinweis: Falls nicht anderst spezifiziert, ist in dieser Serie V ein Vektorraum über einem beliebigen Körper K. Sie können Punkte in den Aufgaben 2, 3, 4(a) und 8(e) bekommen.

1. Sei $N = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{5} & \bar{6} \\ 0 & \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{1} & 0 & \bar{5} \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}_7)$. Finden Sie eine symmetrische Matrix A, so dass die induzierten quadratischen Formen $q_A = q_N$ übereinstimmen.

   Lösung:

   Für $\mathrm{char}(K) \neq 2$ ist $\frac{1}{2}(N + N^T)$ eine solche Matrix. Wir bekommen

$$A = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{3} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{5} & \bar{5} \end{pmatrix}$$

   und es gilt $q_A(x,y,z) = \bar{2}x^2 + \bar{3}y^2 + \bar{5}z^2 + \bar{5}xy + \bar{3}yz = q_N(x,y,z)$.

2. Betrachten Sie den Vektorraum $V = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ zusammen mit der geordneten Basis (2)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Sei $B\colon V \times V \to \mathbb{C}$ gegeben durch $B(A,B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$. Zeigen Sie, dass B bilinear ist und bestimmen sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(B)$.

   Lösung:

   Für die Bilinearität nehmen wir $A, A', C, C' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} B(\lambda A + A', C) &= \mathrm{tr}(\lambda A + A')\,\mathrm{tr}(C) = (\lambda\,\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(A')) \cdot \mathrm{tr}(C) \\ &= \lambda\,\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(C) + \mathrm{tr}(A')\,\mathrm{tr}(C) = \lambda B(A,C) + B(A',C) \\ B(A, \lambda C + C') &= \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(\lambda C + C') = \mathrm{tr}(A) \cdot (\lambda\,\mathrm{tr}(C) + \mathrm{tr}(C')) \\ &= \lambda\,\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(C) + \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(C') = \lambda B(A,C) + B(A,C'). \end{aligned}$$

   Für die Darstellungsmatrix $D = M_{\mathcal{B}}(B)$ haben wir $D_{ij} = B(e_i, e_j)$ für die Basis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ aus der Aufgabenstellung. Also gilt

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Verwenden Sie das symmetrische Gauss-Verfahren (Skript 8.3.1) um für (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   ein $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ zu finden, so dass $P^T A P$ eine Diagonalmatrix ist. Schreiben Sie auch die dabei entstehenden Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_n$ mit $E_n^T(\ldots(E_1^T A E_1)\ldots)E_n = P^T A P$ auf.

Lösung:

Wir verwenden das symmetrische Gaussverfahren und notieren die dabei angewandten Elementar-Matrizen. Ausserdem wenden wir die Elementar-Matrizen gleich auf die Identiätsmatrix an, jedoch jeweils nur für die Elementarmatrizen, die wir von links multiplizieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad E_1^T \text{ (von rechts)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad E_2^T \text{ (von rechts)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad E_3^T \text{ (von rechts)}$$

und somit haben wir

$$P = E_1E_2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

4. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis von V.
   (a) Zeigen Sie, dass es für jedes $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine Basis $\mathcal{C}$ von V gibt, so dass (2)

$$P = [\mathrm{Id}_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}.$$

   (b) Sei B eine Bilinearform und $T = M_{\mathcal{B}}(B)$. Sei $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $S = P^TTP$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{C}$ von V gibt, so dass $S = M_{\mathcal{C}}(B)$.

Lösung:

(a) Sei $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$. Für eine Basis $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$ erfüllt die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung T die definierende Eigenschaft (siehe Definition 3.3.7 im Skript)

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} ([T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}})_{ij} w_i.$$

In unserem Fall haben wir $T = \mathrm{Id}_V$ und wir möchten, dass $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P$ gilt. Die definierende Eigenschaft wird also zu

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} w_i,$$

was wir als Definition von v_j nehmen können: Es folgt, dass für die Basis

$$\mathcal{C} = \left\{ v_1 := \sum_{i=1}^{n} P_{i1} w_i, \dots, v_n := \sum_{i=1}^{n} P_{in} w_i \right\}$$

gerade $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P$ gilt.

(b) Wir definieren die Basis $\mathcal{C}$ wie in (a), das heisst $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P$. Dann haben wir mit Korollar 8.1.8 im Skript

$$M_{\mathcal{C}}(B) = [Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(B) [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = ([Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^T M_{\mathcal{B}}(B) [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P^T T P = S.$$

5. Sei B die Bilinearform $(x, y) \mapsto x^T A y$ auf $\mathbb{R}^2$ für die symmetrische Matrix $A := \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Wir möchten eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$ finden, bezüglich welcher B eine Darstellungsmatrix der Form $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ hat.
   (a) Finden Sie so eine Basis mit Hilfe des Spektralsatzes und geeigneter Skalierung.
   (b) Finden Sie so eine Basis mit Hilfe des Satzes 8.3.3 für Bilinearformen über Körper der Charakteristik $\neq 2$ und geeigneter Skalierung.

Lösung:

(a) Aus dem charakteristischen Polynom $p_A(x) = x^2 - 10x + 21$ folgt, dass die Matrix A die Eigenwerte 3 und 7 zu den jeweiligen Eigenvektoren $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat. Daher bilden $b_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} v_1$ und $b_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} v_2$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, bezüglich welcher B die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ hat. Nun müssen wir nur noch die Basisvektoren richtig skalieren: Die Vektoren $w_1 := \frac{1}{\sqrt{3}} b_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $w_2 := \frac{1}{\sqrt{7}} b_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^2$, bezüglich welcher B die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat.

(b) Wie gehen wie im Beweis von Satz 8.3.3 vor. Sei $w \in V = \mathbb{R}^2$, so dass $B(w, w) \neq 0$, zum Beispiel $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $B(w, w) = 5$. Wir betrachten die Linearform $Q_w \colon V \to K$ mit $Q_w(v) = B(v, w)$. Wir haben

$$N := \ker Q_w = \left\langle v_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und betrachten die Basis $\mathcal{B}' = \{v_1, w\}$ in der

$$M_{\mathcal{B}'}(B) = \begin{pmatrix} 105 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gilt. Durch Skalierung kommen wir auf die gewünschte Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{105}} \\ \frac{5}{\sqrt{105}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

bezüglich welcher B die Einheitsmatrix ist.

6. Seien $A, B \in M_{n \times n}(K)$ Diagonalmatrizen mit den gleichen Diagonaleinträgen, aber möglicherweise in einer anderen Reihenfolge. Zeigen Sie, dass A und B kongruent sind.

Lösung:

Wenn die Vertauschung der Diagonaleinträgen durch die Permutation σ gegeben ist, das heisst $A_{ii} = B_{\sigma(i)\sigma(i)}$, dann können wir die ensprechende Permutationmatrix P mit

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma(i) = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definieren. Dann ist P^T gerade die Permutationsmatrix für σ^{-1}. Wir behaupten, dass

$$B = P^T AP$$

die Kongruenz realisiert. In der Tat haben wir für $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}(P^T AP)_{\sigma(i)\sigma(i)} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (P^T)_{\sigma(i)j} A_{jk} P_{k\sigma(i)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} P_{j\sigma(i)} A_{ji} P_{i\sigma(i)},\end{aligned}$$

da für alle anderen k gilt $P_{k\sigma(i)} = 0$. Ebenfalls ist $P_{j\sigma(i)} = 0$ für alle j, ausser $j = i$. Also gilt

$$(P^T AP)_{\sigma(i)\sigma(i)} = \ldots = P_{i\sigma(i)} A_{ii} = A_{ii} = B_{\sigma(i)\sigma(i)}.$$

Da Permutationen invertierbar sind, ist auch P invertierbar und somit in $\mathrm{GL}_n(K)$.

7. Seien V und W zwei Vektorräume über einem Körper K. Eine Abbildung $B : V \times W \to K$ heisst Bilinearform, falls für jedes $v_1 \in V$ und $w_1 \in W$ die Abbildungen

$$\begin{aligned} V \to K, v \mapsto B(v, w_1) \quad &\text{(Linearität im 1. Argument)} \\ W \to K, w \mapsto B(v_1, w) \quad &\text{(Linearität im 2. Argument)} \end{aligned}$$

linear sind.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $V^* \times V \to K$, $(f, v) \mapsto f(v)$ eine Bilinearform ist.

(b) Definieren Sie eine Vektorraumstruktur auf der Menge der bilinearen Abbildungen $V \times W \to K$.

(c) Eine Bilinearform $B : V \times W \to K$ heisst *nicht ausgeartet*, wenn gilt

$$\begin{aligned} &\forall v \in V \setminus \{0\}\ \exists w \in W : B(v, w) \neq 0, \\ &\forall w \in W \setminus \{0\}\ \exists v \in V : B(v, w) \neq 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie dass zwei endlichdimensionale Vektorräume V, W genau dann isomorph sind, wenn eine nicht ausgeartete Bilinearform $B : V \times W \to K$ existiert.

Lösung:

(a) Nach Definition der Vektorraumstruktur auf V^* gilt für alle $f_1, f_2 \in V^*$, $\lambda \in K$ sowie $v \in V$, dass

$$(f_1 + \lambda f_2)(v) = f_1(v) + \lambda f_2(v)$$

und somit haben wir Linearität im ersten Argument.

Da jedes $f \in V^*$ per definitionem linear ist, gilt für alle $v_1, v_2 \in V$ sowie $\lambda \in K$, dass

$$f(v_1 + \lambda v_2) = f(v_1) + \lambda f(v_2)$$

und es gilt Linearität im zweiten Argument.

(b) Wir zeigen, dass die Menge der bilinearen Abbildungen $V \times W \to K$ ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V \times W, K)$ ist.

Die Nullabbildung gegeben durch $(v, w) \mapsto 0 \in K$ für alle $v \in V$ und $w \in W$ ist sicherlich eine bilineare Abbildung und somit ist die Menge der bilinearen Abbildungen nicht-leer.

Seien $B_1, B_2 : V \times W \to K$ bilinear und sei $\lambda \in K$. Seien $v_1, v_2, v \in V$, $w_1, w_2, w \in W$ sowie $\mu \in K$ beliebig, dann gelten nach Definition der Vektorraumstruktur auf $\mathrm{Abb}(V \times W, K)$ sowie der Bilinearität von B_1 und B_2

$$\begin{aligned}(B_1 + \lambda B_2)(v_1 + \mu v_2, w) =& B_1(v_1 + \mu v_2, w) + \lambda B_2(v_1 + \mu v_2, w)\\ =& B_1(v_1) + \mu B_1(v_1, w) + \lambda B_2(v_1, w) + \mu\lambda B_2(v_2, w)\\ =& \big(B_1(v_1, w) + \lambda B_2(v_1, w)\big) + \mu\big(B_1(v_2, w) + \lambda B_2(v_2, w)\big)\\ =& (B_1 + \lambda B_2)(v_1, w) + \mu(B_1 + \lambda B_2)(v_2, w)\end{aligned}$$

und somit ist $B_1 + \lambda B_2$ linear im ersten Argument. Analog erhält man

$$\begin{aligned}(B_1 + \lambda B_2)(v, w_1 + \mu w_2) =& B_1(v, w_1 + \mu w_2) + \lambda B_2(v, w_1 + \mu w_2)\\ =& B_1(v, w_1) + \mu B_1(v, w_1) + \lambda B_2(v, w_1) + \mu\lambda B_2(v, w_2)\\ =& \big(B_1(v, w_1) + \lambda B_2(v, w_1)\big) + \mu\big(B_1(v, w_2) + \lambda B_2(v, w_2)\big)\\ =& (B_1 + \lambda B_2)(v, w_1) + \mu(B_1 + \lambda B_2)(v, w_2)\end{aligned}$$

und $B_1 + \lambda B_2$ ist linear im zweiten Argument. Insbesondere ist also $B_1 + \lambda B_2$ bilinear.

(c) **“$\Rightarrow$”:** Falls $V \cong W$ gilt, dann ist $\dim(V) = \dim(W)$. Sei also $(v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, sei $(w_1, \dots, w_n)$ eine geordnete Basis von W und sei $(f_1, \dots, f_n)$ die assoziierte duale Basis von W^*, d.h. $f_i(w_j) = \delta_{i,j}$ für alle $1 \le i, j \le n$. Sei $\Phi : V \to W^*$ der eindeutige Isomorphismus mit $\Phi(v_i) = f_i$ für alle $1 \le i \le n$. Die Abbildung $(v, w) \mapsto \Phi(v)(w)$ ist nach Teilaufgabe a bilinear. Wir zeigen, dass sie nicht ausgeartet ist. Sei $v \ne 0$ und sei $\Phi(v) = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$. Da $v \ne 0$ und Φ ein Isomorphismus (insbesondere also injektiv) ist, existiert ein $1 \le i \le n$, sodass $a_i \ne 0$ ist. Es ist $\Phi(v)(w_i) = a_i \ne 0$. Sei andererseits $w \in W \setminus \{0\}$ und sei $w = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$. Da $w \ne 0$, existiert ein $1 \le i \le n$, sodass $b_i \ne 0$ gilt. Es ist $\Phi\big(\Phi^{-1}(f_i)\big)(w) = f_i(w) = b_i \ne 0$. Also ist die Bilinearform nicht ausgeartet und die gewünschte Implikation ist bewiesen.

“$\Leftarrow$”: Angenommen $B : V \times W \to K$ ist eine nicht ausgeartete Bilinearform. Für jedes $v \in V$ definiert, unter Verwendung der Linearität von B im zweiten Argument, die Abbildung $B_v : W \to K$, $w \mapsto B(v, w)$, ein Element in W^*. Da B nicht ausgeartet ist, ist B_v für alle $v \in V \setminus \{0\}$ nicht das Nullelement in W^*. Andererseits gilt unter Verwendung der Linearität von B im ersten Argument für $v_1, v_2 \in V$, $w \in W$ und $\lambda \in K$,

$$B_{v_1 + \lambda v_2}(w) = B_{v_1}(w) + \lambda B_{v_2}(w)$$

und somit ist die Abbildung $V \to W^*$, $v \mapsto B_v$, linear und weil $B_v = 0$ genau dann gilt, wenn $v = 0$ ist, auch injektiv. Da jede injektive lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen Vektorräumen linear unabhängige Mengen auf linear unabhängige Mengen abbildet, folgt $\dim(V) \le \dim(W^*) = \dim(W)$. Analog zeigt man $\dim(W) \le \dim(V)$ und es folgt $\dim(V) = \dim(W)$ und somit die gewünschte Isomorphie.

8. Sei K ein beliebiger Körper. Wir definieren die Relation $\sim$ auf K: Für $a, b \in K$ sei

$$a \sim b \iff \exists \alpha \in K^\times \text{ mit } a = b\alpha^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf K ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklasse von $0 \in K$ nur 0 enthält, also $[0]_\sim = \{0\}$.

(c) Zeigen Sie für $K = \mathbb{R}$, dass $\{0, 1, -1\}$ eine vollständige Menge von Repräsentanten bildet, indem Sie zeigen, dass $[1]_\sim = \{a \in \mathbb{R} \colon a > 0\}$ und $[-1]_\sim = \{a \in \mathbb{R} \colon a < 0\}$.

(d) Zeigen Sie für $K = \mathbb{C}$, dass $\{0, 1\}$ eine vollständige Menge von Repräsentanten bildet, indem Sie zeigen, dass $[1]_\sim = \mathbb{C}^\times$.

(e) Sei $K/\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung wohldefiniert ist: (2)

$$\begin{aligned} \det\colon \operatorname{Bil}(V) &\to K/\sim \\ B &\mapsto [\det M_{\mathcal{B}}(B)]_\sim, \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis von V ist.

Lösung:

(a) Reflexiv: Für $\alpha = 1 \in K^\times$ gilt $a \sim a$ für alle $a \in K$.

Symmetrisch: Wenn $a \sim b$, dann gibt es ein $\alpha \in K^\times$, so dass $a = b\alpha^2$. Wenn wir $\alpha' = \alpha^{-1}$ wählen, dann gilt $b = \alpha'^2$, also gilt $b \sim a$.

Transitiv: Sei $a \sim b$ mit $\alpha \in K^\times$ und $b \sim c$ mit $\alpha' \in K^\times$. Dann ist $a = b\alpha^2 = c\alpha'^2\alpha^2 = c(\alpha'\alpha)^2$ und da $\alpha'\alpha \in K^\times$ gilt auch $a \sim c$.

(b) Wenn $a \sim 0$ gilt, dann gibt es ein $\alpha \in K^\times$, so dass $a = 0\alpha^2 = 0$ gilt. Somit ist $a = 0$ und $[0]_\sim = \{0\}$.

(c) Wir können die reellen Zahlen in positive, negative und 0 aufteilen. Wir haben schon gesehen, dass $[0]_\sim = \{0\}$. Wenn wir eine positive Zahl a haben, dann können wir $\alpha = \sqrt{a} \in K^\times$ nehmen und bekommen $a \sim 1$, da $a = 1\sqrt{a}^2$ gilt. Für eine negative Zahl a können wir hingegen $\alpha = \sqrt{-a} \in K^\times$ nehmen und bekommen $a \sim -1$, da $a = -1\sqrt{-a}^2$. Wir haben alle reellen Zahlen in die Äquivalenzklassen aufgeteilt und somit ist $\{0, 1, -1\}$ eine vollständige Menge von Repräsentanten.

(d) Falls $a = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}^\times$, dann nehmen wir $\alpha = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$. Wir haben dann $a \sim 1$, da $a = 1\alpha^2 = \sqrt{r}^2 e^{2i\varphi/2} = re^{i\varphi}$.

(e) Die Determinante der Darstellungsmatrix hängt von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ ab. Wir müssen zeigen, dass wenn $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zwei Basen von V sind, dass dann $\det M_{\mathcal{B}}(B) \sim \det M_{\mathcal{C}}(B)$ für alle $B \in \operatorname{Bil}(V)$ gilt. Laut Korroloar 8.1.8 gilt:

$$M_{\mathcal{C}}(B) = ([Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{B}}(B) [Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

also gibt es eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$M_{\mathcal{C}}(B) = P^T M_{\mathcal{B}}(B) P$$

und wir können die Determinante berechnen:

$$\det M_{\mathcal{C}}(B) = \det(P^T) \det M_{\mathcal{B}}(B) \det(P) = \det M_{\mathcal{B}}(B) \det(P)^2$$

Wenn wir $\alpha = \det(P)$ wählen, dann ist in der Tat

$$\det M_{\mathcal{C}}(B) \sim \det M_{\mathcal{B}}(B).$$