# Serie 1

Eigenwerte und Quotientenräume
Abgabe 1.3.2021

**Hinweis:** Punkte für den Notenbonus können Sie in den Aufgaben 4(a), 4(b), 6(a) und 7(a) bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen. Für alle Aufgaben sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $T, S \in \mathrm{End}(V)$.

1. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$. Überlegen Sie geometrisch.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \text{für } \varphi \in (0, 2\pi)$$

**Definition.** *Ein Endomorphismus $T \in \mathrm{End}(V)$ eines Vektorraums $V$ heisst* nilpotent*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $T^n = 0$.*

2. Zeigen Sie: Jeder nilpotente Endomorphismus hat 0 als Eigenwert und 0 ist der einzige Eigenwert.
3. Zeigen Sie: Falls $T^2 + T$ den Eigenwert $-1$ hat, dann hat $T^3$ den Eigenwert 1.
4. Beweisen Sie:
   (a) Wenn $v \in V$ ein Eigenvektor von $T \circ S$ mit Eigenwert $\lambda \in K$ ist, und $S(v) \neq 0$ gilt, dann ist $S(v)$ ein Eigenvektor von $S \circ T$ mit Eigenwert $\lambda$. (2)
   (b) Falls $V$ endlichdimensional ist, dann haben $T \circ S$ und $S \circ T$ dieselben Eigenwerte. (2)
   (c) Finden Sie ein Beispiel eines Vektorraums in dem $T \circ S$ und $S \circ T$ unterschiedliche Eigenwerte haben. *Tipp: Verschiebung*

Die folgenden drei Aufgaben verwenden nur Material aus der Linearen Algebra I und werden in der Vorlesung verwendet werden. Zusätzlich sei $V$ von nun an endlichdimensional.

**Definition.** *Zwei Endomorphismen $S, T \in \mathrm{End}(V)$ heissen* simultan diagonalisierbar*, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von $V$ gibt, so dass $[T]_{\mathcal{B}}$ und $[S]_{\mathcal{B}}$ beide diagonal sind.*

5. Zeigen Sie: Falls $T, S$ simultan diagonalisierbar sind, dann gilt $T \circ S = S \circ T$.

**Bemerkung.** *Die andere Implikation wird in der Vorlesung gezeigt werden.*

**Definition.** *Ein Untervektorraum $U \subseteq V$ heisst $T$-*invariant*, wenn $T(U) \subseteq U$.*

6. Sei $U$ ein $T$-invarianter Untervektorraum von $V$.
   (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung (2)

$$\begin{aligned} T_{V/U} \colon V/U &\to V/U \\ v + U &\mapsto Tv + U \end{aligned}$$

   ein wohl-definierter Endomorphismus von $V/U$ ist.

(b) Wir nehmen an, dass $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von $V$ ist, so dass $U = \mathrm{Sp}\,(v_1, \ldots, v_r)$ für ein $0 < r < n$. Zeigen Sie:

(1) $\mathcal{B}_{V/U} := (v_{r+1} + U, \ldots, v_n + U)$ ist eine Basis von $V/U$.

(2) Es existieren $A \in M_{r\times r}(K)$ und $B \in M_{(n-r)\times(n-r)}(K)$, so dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} A & (*) \\ \hline 0 & B \end{array}\right),$$
$$[T_{V/U}]_{\mathcal{B}_{V/U}} = B,$$
$$[T|_U]_{\mathcal{B}_U} = A,$$

wobei $\mathcal{B}_U = (v_1, \ldots, v_r)$ ist.

7. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von $V$ und $\pi_U : V \to V/U$ die kanonische Abbildung

$$v \in V \mapsto v + U \in V/U.$$

Für einen Untervektorraum $W \subseteq V$ sei

$$\pi_U(W) = \{\pi_U(w) \mid w \in W\}.$$

Für einen Untervektorraum $L \subseteq V/U$ sei

$$\pi_U^{-1}(L) = \{v \in V \mid \pi_U(v) \in L\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktionen $\pi_U$ und $\pi_U^{-1}$ induzieren eine Bijektion (2)

$$\{W \subseteq V\colon W \text{ ist UVR von } V \text{ mit } U \subseteq W\} \xrightarrow{\tilde{\pi}_U} \{L \subseteq V/U\colon L \text{ ist UVR von } V/U\}.$$

(b) Falls $U$ $T$-invariant ist, dann induziert die Bijektion in (a) die Bijektion

$$\{W \subseteq V\colon W \text{ ist } T\text{−inv. UVR von } V \text{ mit } U \subseteq W\} \xrightarrow{\tilde{\pi}_U} \{L \subseteq V/U\colon L \text{ ist } T_{V/U}\text{−inv. UVR von } V/U\}.$$

(c) Falls $\dim U = r < \infty$ und $L$ ein Untervektorraum von $V/U$ ist mit $\dim L = s$, dann ist

$$\dim \pi_U^{-1}(L) = r + s.$$