Serie 10

Sylvester und positiv-Definitheit
Abgabe 10. 5. 2021

Hinweis: In dieser Serie ist V ein Vektorraum über einem Körper K. Wenn von positiv Definitheit die Sprache ist, dann ist immer $K = \mathbb{R}$ gemeint. Sie können Punkte in den Aufgaben 3(a), 6(b) und 8(c) bekommen.

1. Betrachte die quadratische Form q auf $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) := 4x_1^2 - 12x_1x_2 + 12x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_4 - 4x_3x_4 + 3x_4^2 .$$

   Ist q positiv definit? Ist q ausgeartet? Was ist die Signatur von q?

2. Betrachten Sie die symmetrischen reellen Matrizen

$$(a)\quad A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (b)\quad B := \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (c)\quad C := \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie, ob A und B positiv definit sind. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist C positiv definit?

   Hinweis: Verwende das Hauptminorenkriterium.

3. Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Eine Bilinearform $B \in \mathrm{Bil}(V)$ heisst *antisymmetrisch (oder schiefsymmetrisch)*, falls $\forall v, w \in V : B(v, w) = -B(w, v)$ gilt.
   (a) Zeigen Sie, dass jede Bilinearform auf V eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Bilinearform dargestellt werden kann. (2)
   (b) Sei B eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass B genau dann antisymmetrisch ist, wenn für jede Basis $\mathcal{B}$ von V gilt
   $$M_{\mathcal{B}}(B)^T = -M_{\mathcal{B}}(B).$$
   (c) Folgern Sie, dass für eine antisymmetrische Bilinnearform B und eine beliebigen Basis $\mathcal{B}$ alle Diagonaleinträge von $M_{\mathcal{B}}(B)$ Null sind.
   (d) Ein *symplektischer Vektorraum* ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum zusammen mit einer antisymmetrischen Bilinearform ω, die nicht ausgeartet ist. Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale symplektische Vektorraum eine Basis $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}$ besitzt, so dass für alle i, j gilt ($\star$)
   $$\begin{aligned} \omega(v_i, v_j) &= 0 \\ \omega(w_i, w_j) &= 0 \\ \omega(v_i, w_j) &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$
   Insbesondere hat jeder symplektische Vektorraum gerade Dimension.

4. Zeigen Sie, dass es $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Kongruenzklassen von reellen symmetrischen $n \times n$-Matrizen gibt.

5. Sei q eine quadratische Form über $V = \mathbb{R}^2$. Stellen Sie ein Kriterium an die Signatur von q auf, anhand welchem man entscheiden kann, ob $V_q = \{v \in \mathbb{R}^2 : q(v) = 1\}$ eine Hyperbel oder Ellipse ist. Welche anderen Formen kann V_q annehmen?

   Hinweis: Sie können die folgende Definition verwenden: Eine Menge V ist eine *Hyperbel*, falls es eine Basis $\{v_1, v_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ gibt, so dass $V = \{v = xv_1 + yv_2 \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$ gilt. Eine Menge V ist eine *Ellipse*, falls es eine Basis $\{v_1, v_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ gibt, so dass $V = \{v = xv_1 + yv_2 \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ gilt.

6. Wir betrachten die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$
und vollziehen die Schritte von Satz 8.5.11.
   (a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A positiv sind.
   (b) Finden Sie eine symmetrische invertierbare Matrix S mit $S^T S = S^2 = A$. (2)
   (c) Finden Sie eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R mit $R^T R = A$.

7. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und
$$p_A(x) = (-1)^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0).$$
Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) Die Matrix A ist genau dann negativ definit, wenn die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ alle positiv sind.
   Hinweis: Betrachten Sie $q(x) := \prod(x - \lambda_i)$.
   (b) Die Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ alternierende Vorzeichen haben, mit $a_{n-1} < 0$.
   Hinweis: Betrachten Sie $(-1)^n q(-x)$ und benützen Sie (a).

8. Seien A und C zwei reelle symmetrische $n \times n$-Matrizen mit A positiv definit.
   (a) Zeigen Sie, dass eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ existiert, so dass $S^T AS$ und $S^T CS$ beide Diagonalmatrizen sind.
   Hinweis: Finden Sie $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $P^T AP = I_n$. Wenden Sie dann den Spektralsatz auf $P^T CP$ an.
   (b) Gilt die Aussage in (a) auch, wenn A nicht positiv definit ist? Untersuche zum Beispiel die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
   (c) Zeige, dass ein $k_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $C + kA$ positiv definit ist für alle $k > k_0$. (2)
   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 8(a).

9. Wir übersetzen die Aussagen von Aufgabe 8 in die Sprache der Bilinearformen. Das Lemma aus Serie 9, Aufgabe 4(a) könnte hilfreich seni.
   (a) Seien B und D zwei symmetrische Bilinearformen, mit B positiv definit. Zeigen Sie, dass eine Basis $\mathcal{C}$ existiert, so dass $M_{\mathcal{C}}(B)$ und $M_{\mathcal{C}}(D)$ diagonal sind.
   (b) Seien B und D zwei symmetrische Bilinearformen, mit B positiv definit. Zeigen Sie, dass ein $k_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $D + kB$ für alle $k > k_0$ eine positv-definite symmetrische Bilinearform ist.