Serie 11

Jordan-Normalform
Abgabe 17. 5. 2021

Hinweis: In dieser Serie geht es um die Jordan-Normalform (Satz 9.1.9 im Skript). In Aufgabe 1 zeigen Sie einen Spezialfall davon. In allen restlichen Aussagen dürfen und sollen Sie den Satz verwenden. Sie können Punkte in 2(e), 3(b) und 7 bekommen.

1. Sei $N \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent mit Index k, das heisst $N^{k-1} \neq 0$, aber $N^k = 0$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen ohne Verwendung der Jordan-Normalform.
   (a) Für alle $v \in V$ gilt für die Lebensdauer $\ell(v) \leq k-1$ und es gibt ein $v \in V$ mit $\ell(v) = k-1$.
   (b) Falls $\dim(V) = k$, dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $[N]_{\mathcal{B}} = J_{0,k}$.
2. Sei $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von T.
   (a) Zeigen Sie, dass die geometrische Vielfachheit von λ gleich der Anzahl Jordanblöcke zum Eigenwert λ ist.
   (b) Wie lässt sich die algebraische Vielfachheit in der Jordan-Normalform interpretieren?
   (c) Schliessen Sie aus (a) und (b), dass T genau dann diagonalisierbar ist, wenn die algebrische und geometrische Vielfachheit aller Eigenwerte gleich sind.
   (d) Sei k die Potenz, die im Minimalpolynom $M_T(x) = \dots (x-\lambda)^k \dots$ für λ vorkommt. Welche Interpretation hat k in der Jordan-Normalform?
   (e) Angenommen wir wissen für jeden Eigenwert von T die geometrische Vielfachheit, die algebraische Vielfachheit und den Exponenten k im Minimalpolynom. Können wir aus diesen Daten die Jordan-Normalform vollständig herleiten? (2)
3. Wir möchten die Jordan-Normalform von linearen Abbildungen für Matrizen übersetzen.
   (a) Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und nehmen Sie an, dass $p_A(x)$ in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, dass A ähnlich ist zu einer Matrix in Jordan Normalform.
   (b) Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und nehme an, dass $p_A(x)$ in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, dass eine diagonalisierbare Matrix $E \in M_{n\times n}(K)$ und eine nilpotente Matrix $N \in M_{n\times n}(K)$ existieren, sodass $EN = NE$ und $A = E + N$. (2)
4. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass A und A^T zueinander ähnlich sind.
5. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{F}_2$.
6. Sei $\lambda \in K$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie einmal direkt und einmal unter Verwendung der Jordan-Normalform, dass K^n unzerlegbar bezüglich $m_{J_{\lambda,n}} \colon K^n \to K^n$ ist.
7. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine Matrix endlicher Ordnung, d.h. $A^m = I_n$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist. (2)
8. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ mit $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass A nilpotent ist.

   Hinweis: Verwenden Sie die Jordansche Normalform von A und die Determinante der Vandermonde-Matrix $V(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ aus LAI, Serie 13, Aufgabe 8(a).