Serie 12

Jordan-Normalform und Matrix-Exponential
Abgabe 24. 5. 2021

Hinweis: In dieser Serie geht es um die Jordan-Normalform, sowie eine ihrer Anwendungen, der Exponentialfunktion. In den Aufgaben 1, 4(a) und 7(a) können Sie Punkte bekommen.

1. Berechnen Sie die Jordan-Normalform und eine dazugehörige Basis von (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Jordan-Normalform J von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ a-3 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie für $a = 1$ und $a = -1$ jeweils eine Jordan-Basis von $\mathbb{R}^3$ für A.

3. Seien $q, p \in \mathbb{C}[x]$ Polynome, so dass die Leitkoeffizienten von p und q, $(-1)^{\deg(p)}$ und 1 sind, so dass p und q die gleichen Nullstellen haben und so dass q ein Teiler von p ist. Finden Sie einen Endomorphismus $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{\deg(p)})$, so dass p das charakteristische Polynom und q das Minimalpolynom von T ist.

4. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\exp(A)$ invertierbar ist, indem Sie eine explizite Inverse finden. (2)
   (b) Zeigen Sie, dass $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.
   (c) Folgern Sie aus (b), dass $\exp(A)$ invertierbar ist.

5. Zeigen Sie, dass für[1]

$$\mathfrak{so}(2) := \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \colon X = -X^T\}$$
$$\mathrm{SO}(2) := \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \colon AA^T = I_2 \text{ und } \det(A) = 1\},$$

gilt: $\exp(\mathfrak{so}(2)) = \mathrm{SO}(2)$.

6. Sei $d \geq 0$ und betrachte $D : \mathbb{R}[x]_d \to \mathbb{R}[x]_d$, $D(p(x)) = p'(x)$.
   (a) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}[x]_d$, sodass $[D]_{\mathcal{B}}$ eine Jordan Normalform ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $\exp(D)$ die Abbildung $p(x) \mapsto p(x+1)$ ist.
   (c) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}[x]_d$, sodass gilt ($\star$)

$$[\exp(D)]_{\mathcal{B}'} = I_{d+1} + [D]_{\mathcal{B}}.$$

7. (a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem (2)

$$x'(t) = x(t) + y(t)$$
$$y'(t) = y(t)$$

   mit Anfangsbedingungen $x(1) = 0, y(1) = e$.

[1] Diese Definitionen kommen aus der Theorie der Lie-Gruppen: $\mathfrak{so}(2)$ ist die Lie-Algebra von der Lie-Gruppe SO(2).

(b) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= -6x(t) + 9y(t) \\ y'(t) &= -6x(t) + 6y(t) - 2z(t) \\ z'(t) &= 9x(t) - 9y(t) + 3z(t) \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.
Hinweis: Verwende die Jordansche Normalform.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + 9y(t) + 9z(t) \\ y'(t) &= 3x(t) - 6y(t) - 8z(t) \\ z'(t) &= -4x(t) + 11y(t) + 13z(t) \end{aligned}$$

zu der Anfangsbedingung $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.