Serie 13

Dualräume
Abgabe 31.5. 2021

Hinweis: In dieser Serie ist V ein K-Vektorraum. Sie können Punkte in den Aufgaben 2(b), 3 und 7(a) bekommen. Am 24. 5. 2021 findet keine Übungsstunde statt. Sie können aber trotzdem ihre Serien online abgeben.

1. Sei I eine beliebige Menge. Für $i \in I$ sei $e_i : I \to K$ durch
$$e_i(j) = \delta_{ij} \text{ für alle } j \in I$$
definiert.
   (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}((e_i)_{i\in I}) = K^{(I)} := \{f\colon I \to K \mid |\operatorname{supp}(f)| < \infty\} \subseteq K^I$.
   (b) Verwenden Sie Proposition 10.1.1, um zu zeigen, dass $(K^{(I)})^* \cong K^I$.

2. Wir betrachten den K-Vektorraum $V = M_{2\times 2}(K)$ mit der Standardbasis
$$\mathcal{E} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
   (a) Geben Sie die duale Basis $\mathcal{E}^\star$ explizit an.
   (b) Sei $\mathcal{B} = \left\{ e_1, e_2, e_3, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine weitere Basis von V. Für die Elemente der dualen Basis $\mathcal{B}^\star =$ (2)
   $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ geben Sie die Darstellungsmatrizen $[\varphi_i]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}_1}$ an, wobei $\mathcal{E}_1 = \{1_K\} \subseteq K$. Überprüfen Sie, dass die Bedingungen der dualen Basis erfüllt sind. Bemerken Sie, dass sich in der Basis $\mathcal{B}$ nur ein Vektor geändert hat, in der dualen Basis $\mathcal{B}^\star$ sind jedoch mehrere Elemente unterschiedlich.

3. Seien V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume. Zeigen Sie, dass (2)
$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(V, W) &\to \mathrm{Hom}(W^\star, V^\star) \\ T &\mapsto T^\star \end{aligned}$$
ein Isomorphismus ist.

4. Sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und $U \subseteq W$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass $T^\star(U^0) = (T^{-1}(U))^0$.

5. Sei V ein Vektorraum und $W_1, W_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Zeigen Sie,
   (a) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$,
   (b) $W_1^0 + W_2^0 \subseteq (W_1 \cap W_2)^0$,
   (c) Falls V endlichdimensional ist, dann ist $W_1^0 + W_2^0 = (W_1 \cap W_2)^0$.
   Bemerkung: Für V unendlichdimensional gilt im Allgemeinen in (b) keine Gleichheit.

6. Sei $V = \mathbb{R}[t]_2$ der Vektorraum der rellen Polynome von Grad ≤ 2. Für $p \in V$ definieren wir
$$f_1(p) = \int_0^1 p(t)\,\mathrm{dt}, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(t)\,\mathrm{dt}, \quad f_3(p) = -\int_{-1}^0 p(t)\,\mathrm{dt}\,.$$
   (a) Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 linear sind, also Elemente des Dualraums $V^\star$ definieren.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ eine Basis von $V^\star$ bildet.

(c) Berechnen Sie die duale Basis $\mathcal{B}^\star \subseteq V^{\star\star} \cong V$ und geben sie die entsprechenden Vektoren in V unter Verwendung der natürlichen Identifikation $V^{\star\star} \to V$ an.

7. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und $W \subseteq V, U \subseteq V^\star$ Unterräume. Wir identifizieren $V^{\star\star} \cong V$ und $V^{\star\star\star} \cong V^\star$ mit den natürlichen Isomorphismen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $(W^0)^0 = W$. (2)

(b) $(U^0)^0 = U$.

(c) Falls $W^0 = U$, dann $U^0 = W$.

(d) Falls $W \subseteq K^n_{\text{Spalten}}$ mit Basis $\{w_1, \dots, w_k\}$, dann gilt

$$W^0 = \left\{ a \in K^n_{\text{Zeilen}} : a \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ w_1 & \dots & w_k \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = 0_{K^k_{\text{Zeilen}}} \right\} = \left\{ a \in K^n_{\text{Zeilen}} : \begin{pmatrix} \cdots & w_1^T & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & w_k^T & \cdots \end{pmatrix} a^T = 0_{K^k_{\text{Spalten}}} \right\}.$$

(e) Falls $U \subseteq K^n_{\text{Zeilen}}$ mit Basis $\{u_1, \dots, u_k\}$, dann gilt

$$U^0 = \left\{ x \in K^n_{\text{Spalten}} : \begin{pmatrix} \cdots & u_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & u_k & \cdots \end{pmatrix} x = 0_{K^k_{\text{Spalten}}} \right\}.$$

(f) Sei $W \subseteq K^n_{\text{Spalten}}$ mit einer Basis $\{w_1, \dots, w_k\}$ und sei

$$U = \left\{ u \in K^n_{\text{Zeilen}} : \begin{pmatrix} \cdots & w_1^T & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & w_k^T & \cdots \end{pmatrix} u^T = 0_{K^k_{\text{Spalten}}} \right\}$$

mit einer Basis $\{u_1, \dots, u_\ell\} \subseteq K^n_{\text{Zeilen}}$. Erklären Sie warum

$$W = \left\{ x \in K^n_{\text{Spalten}} : \begin{pmatrix} \cdots & u_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & u_\ell & \cdots \end{pmatrix} x = 0_{K^k_{\text{Spalten}}} \right\}.$$

(g) Betrachten Sie den Untervektorraum $W \subseteq \mathbb{R}^4$ aufgespannt durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix A mit $\operatorname{Ker}(A) = W$.