Serie 14

Multilineare Abbildungen
Kein Abgabedatum

Hinweis: In dieser Serie sind $V, V_1, \ldots, V_k, V_1', \ldots, V_k', W$ und W' endlichdimensionale K-Vektorräume. Diese Serie behandelt den Stoff der Vorlesung am 26. 5. 2021. In der letzten Vorlesungswoche wird es noch eine Serie 15 geben, in der das Tensorprodukt geübt werden kann. Die Serien 14 und 15 werden nicht mehr korrigiert und Sie können keine Punkte mehr holen. Sie fungieren aber als wertvolle Übungsmöglichkeit zu den letzten Themen der Vorlesung.

1. Beweisen Sie die folgenden Propositionen:
   (a) $\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_k; W)$ ist ein Unterraum des Raums aller Abbildungen $V_1 \times \cdots \times V_k \to W$.
   (b) $\mathrm{Sym}^k(V, W)$ und $\mathrm{Alt}^k(V, W)$ sind Untervektorräume von $\mathrm{Mult}(V^k, W)$.
   (c) Seien $f_i \colon V_i' \to V_i$ für $1 \leq i \leq k$ sowie $g \colon W \to W'$ lineare Abbildungen. Dann erhalten wir eine lineare Abbildung
   $$\begin{aligned} \mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_k; W) &\to \mathrm{Mult}(V_1', \ldots, V_k'; W'), \\ \phi &\mapsto g \circ \phi \circ (f_1 \times \cdots \times f_k). \end{aligned}$$
   (d) Lineare Abbildungen $f \colon V' \to V$ und $g \colon W \to W'$ induzieren lineare Abbildungen
   $$\begin{aligned} \mathrm{Sym}^k(V, W) &\to \mathrm{Sym}^k(V', W'), \\ \mathrm{Alt}^k(V, W) &\to \mathrm{Alt}^k(V', W'), \\ \varphi &\mapsto g \circ \varphi \circ (f \times \ldots \times f). \end{aligned}$$

2. Was ist die Dimension von $\mathrm{Mult}_K(V, V^\star; V)$? Finden Sie eine Basis.

3. Betrachten Sie die Abbildung
   $$\varphi \colon V \times V \times V \to V$$
   $$\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \cdot v_1 \cdot w_1 \\ \vdots \\ u_n \cdot v_n \cdot w_n \end{pmatrix}$$
   wobei $n = \dim V$.
   (a) Zeigen Sie, dass φ eine multilineare Abbildung ist.
   (b) Ist φ symmetrisch?
   (c) Ist φ alternierend?

4. Sei $\varphi \colon V^k \to W$ eine alternierende Multilinearform. Zeigen sie, dass φ antisymmetrisch ist, das heisst $\forall v_1, \ldots v_k \in V \ \forall \sigma \in S_k \colon \varphi(v_{\sigma 1}, \ldots, v_{\sigma k}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \varphi(v_1, \ldots, v_k)$.

   Bemerkung: Sie dürfen die Tatsache verwenden, dass S_n von Transpositionen erzeugt wird.

5. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige alternierende Abbildung $\Phi \in \mathrm{Alt}^n_K(V, K)$ gibt, so dass $\Phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$.

   Bemerkung: Dies zeigt, wie man die Determinante für allgemeine abstrakte Vektorräume definieren Kann. In Kapitel 4 haben wir genau das für $V = K^n_{Zeilen}$ und die Standardbasis gemacht.

6. Sei $\mathbf{Vek}_K$ die Kategorie aller Vektorräume über K.

(a) Wir fixieren einen Vektorraum W. Sei

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}^k(\cdot, W) \colon \mathbf{Vek}_K &\to \mathbf{Vek}_K \\ V &\mapsto \mathrm{Alt}^k(V, W).\end{aligned}$$

In Aufgabe 1 haben wir für jedes $T \in \mathrm{Hom}(V, V')$ eine Abbildung $\mathrm{Alt}^k(T, W) : \mathrm{Alt}^k(V', W) \to \mathrm{Alt}^k(V, W)$ definiert. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Alt}^k(\cdot, W)$ mit dieser Definition ein kontravarianter Funktor ist.

Bemerkung: Zu zeigen ist bloss:

- $\mathrm{Alt}^k(T \circ S, W) = \mathrm{Alt}^k(S, W) \circ \mathrm{Alt}^k(T, W)$
- $\mathrm{Alt}^k(\mathrm{Id}_V, W) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Alt}^k(V,W)}$

(b) Wir fixieren jetzt V und betrachten

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}^k(V, \cdot) \colon \mathbf{Vek}_K &\to \mathbf{Vek}_K \\ W &\mapsto \mathrm{Alt}^k(V, \cdot).\end{aligned}$$

Definieren Sie $\mathrm{Alt}^k(V, S)$ für $S \in \mathrm{Hom}(W, W')$ mittels Aufgabe 1 und zeigen Sie, dass $\mathrm{Alt}^k(V, \cdot)$ ein kovarianter Funktor ist.

(c) Formulieren und beweisen Sie ähnliche Aussagen für $\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_k; W)$ und $\mathrm{Sym}^k(V, W)$.

(d) Sei $F \colon \mathbf{Vek}_K \to \mathbf{Vek}_K$ ein Funktor und sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass $F(T)$ auch ein Isomorphismus ist. Bemerken Sie, dass $F(T) \in \mathrm{Hom}(F(V), F(W))$, falls F kovariant ist, und $F(T) \in \mathrm{Hom}(F(W), F(V))$, falls F kontravariant ist, aber die Aussage in beiden Fällen gilt.