Serie 15

Tensorprodukt
Kein Abgabedatum

Hinweis: In dieser Serie sind U, V, V_1, V_2 und W endlichdimensionale K-Vektorräume, ausser wenn anders gekennzeichnet. Diese Serie behandelt den Stoff der letzten Vorlesungswoche. Diese Serie wird nicht mehr korrigiert und Sie können keine Punkte mehr holen.

1. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so, dass sie aus der kleinstmöglichsten Summe von reinen Tensoren bestehen.
   (a) Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$.
   $$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
   (b) Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$.
   $$-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$$

2. Sei $\dim(V) = 2$ und $\{e_1, e_2\}$ eine Basis von V. Für $a, b, c, d \in K$ sei
   $$v = a(e_1 \otimes e_1) + b(e_1 \otimes e_2) + c(e_2 \otimes e_1) + d(e_2 \otimes e_2).$$
   Zeigen Sie, dass v ein reiner Tensor ist genau dann wenn $ad = bc$.

3. Laut der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts gibt es eine multilineare Abbildung
   $$\begin{aligned} \iota \colon V \times V &\to V \otimes V \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 \otimes v_2 \end{aligned}$$
   so dass für jeden Vektorraum W und jede multilineare Abbildung $\varphi \colon V \times V \to W$ eine lineare Abbildung $\overline{\varphi} \colon V \otimes V \to W$ existiert mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \iota$.
   Sei $W = V = K^n$ und
   $$\begin{aligned} \varphi \colon V \times V &\to V \\ \left(\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}w_1\\ \vdots \\ w_n\end{pmatrix}\right) &\mapsto \begin{pmatrix}v_1 \cdot w_1\\ \vdots \\ v_n \cdot w_n\end{pmatrix}. \end{aligned}$$
   Finden Sie $\overline{\varphi} \colon V \otimes V \to V$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \iota$ und überzeugen Sie sich, dass $\overline{\varphi}$ linear ist.

4. Zeigen Sie:
   (a) Jedes Element in $V \otimes W$ lässt sich als Summe von $\min\{\dim V, \dim W\}$ reinen Tensoren schreiben.
   (b) Seien V und W nicht mehr notwendigerweise endlichdimensional. Die Abbildung
   $$\begin{aligned} V^* \otimes W &\to \mathrm{Hom}(V, W), \\ (f \otimes w) &\mapsto (v \mapsto f(v)w) \end{aligned}$$
   ist ein injektiver Homomorphismus.

(c) Wenn V und W endlichdimensional sind, dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} V^* \otimes W &\to \operatorname{Hom}(V, W), \\ (f \otimes w) &\mapsto (v \mapsto f(v)w) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

5. Sei $S, T \in \operatorname{Hom}(V, W)$.
   (a) Zeigen Sie, dass wenn $S = 0$ oder $T = 0$, dann auch $S \otimes T = 0 \in \operatorname{Hom}(V, W) \otimes \operatorname{Hom}(V, W)$.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Id}_V \otimes \mathrm{Id}_W = \mathrm{Id}_{V \otimes W}$.

6. Zeigen Sie, dass der freie Vektorraum über einer Menge S eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus ist (Siehe Übung 11.8.2 im Skript).

7. Seien U und V zwei K-Vektorräume. Ein Tripel (D, π_U, π_V) heisst eine *externe direkte Summe von U und V*, wenn folgendes gilt:
   - D ist ein K-Vektorraum.
   - $\pi_U : D \to U$ und $\pi_V : D \to V$ sind lineare Abbildungen.
   - (D, π_U, π_V) hat die folgende universelle Eigenschaft: Falls (W, f_U, f_V) ein Tripel ist, wobei W ein K-Vektorraum ist und $f_U : W \to U$ und $f_V : W \to V$ lineare Abbildungen sind, dann existiert eine *eindeutige* lineare Abbildung $\varphi : W \to D$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "f_U"'] \arrow[d, dotted, "\varphi"] \arrow[dr, "f_V"] & \\ U & D \arrow[l, "\pi_U"] \arrow[r, "\pi_V"'] & V \end{tikzcd}$$

   (a) Zeigen Sie, dass
   $$U \times V = \{(u, v) \mid u \in U,\ v \in V\},$$
   mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation, und $\pi_U(u, v) = u$, $\pi_V(u, v) = v$, die obige universelle Eigenschaft hat.
   (b) Zeigen Sie, dass eine externe direkte Summe eindeutig ist bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.
   (c) Finden Sie einen Unterraum $S \subseteq F_K(U \times V)$, sodass $F_K(U \times V)/S$ (zusammen mit der richtigen Wahl von π_U und π_V) eine externe direkte Summe von U und V ist.

8. Seien α, β, γ Vektoren in einem K-Vektorraum. Vereinfache die Ausdrücke
   (a) $(\alpha - \beta) \wedge (\alpha + \beta)$
   (b) $(\alpha - \beta) \wedge (\beta - \gamma) \wedge (\gamma - \alpha)$
   (c) $(\beta - \alpha) \wedge (\gamma - \alpha) + (\alpha + \gamma) \wedge \gamma - \beta \wedge \gamma$.

9. Seien $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum V. Zeigen Sie
$$\operatorname{Sp}(v_1, \ldots, v_k) = \{x \in V : v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge x = 0\}.$$