Serie 2

Eigenwerte
Abgabe 8.3.2021

Hinweis: Punkte können Sie in den Aufgaben 3(c), 6(b) und 7(a) bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, einen grossen Teil der Serie zu lösen. In Aufgabe 6 können Sie einige Teilaufgaben für das spätere Üben aufbewahren. Die Aufgabe 7(b) ist etwas schwieriger und mit einem ($\star$) markiert.

1. Wie in Serie 1, Aufgabe 1, betrachten Sie die folgenden Matrizen in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \text{für } \varphi \in (0, 2\pi)$$

   (a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom für die drei Matrizen.
   (b) Berechnen Sie die Nullstellen der charakteristischen Polynome über $\mathbb{R}$.
   (c) Zu jeder Nullstelle λ, berechnen Sie $\mathrm{Eig}_T(\lambda)$ für $T \in \{A, B, C\}$.
   (d) Sind die Matrizen über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? Sind die Matrizen über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?
   (e) Vergleichen Sie die Resultate mit der Lösung von Serie 1, Aufgabe 1.

2. Sei $\mathbb{R}[x]_3$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 3 und sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R}[x]_3 &\to \mathbb{R}[x]_3 \\ p &\mapsto p(a) + p'(a)(x-a), \end{aligned}$$

   wobei p' die Ableitung des Polynoms p ist.

   (a) Begründen Sie, dass φ linear ist.
   (b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von φ bezüglich der Basis $E_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$.
   (c) Bestimmen Sie eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}[x]_3$, bezüglich der die Darstellungsmatrix von φ Diagonalgestalt hat.

3. Sei die Matrix $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$ definiert als

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 & 1 \\ -8 & 1 & -12 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -6 & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Betrachten Sie A über dem Körper $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte, sowie die zugehörigen Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar?
   (b) Lösen Sie Teilaufgabe (a) über dem Körper $\mathbb{F}_5$.
   (c) Berechnen Sie A^{2021} über $\mathbb{F}_5$. (2)

Definition. *Ein Endomorphismus* $T \in \mathrm{End}(V)$ *heisst* als obere/untere Dreiecksmatrix triangularisierbar*, falls es eine Basis* $\mathcal{B}$ *von* V *gibt, so dass* $[T]_{\mathcal{B}}$ *eine obere/untere Dreiecksmatrix ist.*

4. Beweisen Sie, dass $T \in \mathrm{End}(V)$ als obere Dreiecksmatrix triangularisiert werden kann, genau dann wenn T als untere Dreiecksmatrix triangularisiert werden kann.

5. (a) Finden Sie einen Vektorraum V und Untervektorräume U_1, U_2, U_3, so dass
$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}, \quad V = U_1 + U_2 + U_3 \quad \text{aber} \quad V \neq U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$$
gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass die folgenden drei Bedingungen äquivalent sind:
   (1) $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$.
   (2) $V = W_1 + \ldots + W_k$ und $W_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} W_j = \{0\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.
   (3) $V = W_1 + \ldots + W_k$ und $W_i \cap (W_{i+1} + \ldots + W_k) = \{0\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

   (c) Sei
$$U = \left\{(x, y, x+y, x-y, 2x) \in K^5 \colon x, y \in K\right\},$$
finde drei Unterräume W_1, W_2, W_3 von K^5, die nicht $\{0\}$ sind, so dass $K^5 = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

6. Im Folgenden sind Zahlenfolgen $(a_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{Z}$ rekursiv definiert. Finden Sie eine Formel für a_n in Abhängigkeit von $n \geq 3$.
   (a) $a_1 = 0, a_2 = 2, a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 2$.
   (b) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 7, a_{n+1} = -2a_n + a_{n-1} + 2a_{n-2}$ für $n \geq 3$. (2)
   (c) $a_1 = 1, a_2 = 6, a_3 = 8, a_{n+1} = 6a_n - 11a_{n-1} + 6a_{n-2}$ für $n \geq 3$.
   (d) $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 5, a_{n+1} = 7a_n - 14a_{n-1} + 8a_{n-2}$ für $n \geq 3$.

7. Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ und
$$p_A(x) = (-1)^n (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$$
das charakteristische Polynom von A. Sei weiter
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
   (a) Zeigen Sie, dass $p_C(x) = p_A(x)$. (2)
   (b) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind: ($\star$)
   (i) Es existiert $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass
$$S^{-1}AS = C.$$
   (ii) Es existiert $v \in \mathbb{C}^n$, so dass
$$\left\{v, Av, \ldots, A^{n-1}v\right\}$$
eine Basis von $\mathbb{C}^n$ ist.