Serie 3

Trigonalisierung, Minimalpolynom
Abgabe 15.3.2021

Hinweis: Sie können in den Aufgaben 1(a), 4(c) und 7 Punkte erhalten. Wenn nicht genauer spezifiziert, sind Matrizen hier immer in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

1. (a) Trigonalisieren sie die folgende Matrix: (2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Betrachten sie die lineare Abbildung $T \in \operatorname{End}(\mathbb{R}[x]_2)$ definiert durch

$$T(g(x)) = 2g(x) + 4g'(0)$$

Finden Sie eine Basis von $\mathbb{R}[x]_2$, in der T eine obere Dreiecksmatrix ist.

(c) Ist die Trigonalisierung (als obere Dreiecksmatrix) der linearen Abbildung T in (b) eindeutig?

2. Wieso ist der folgende Beweis des Cayley-Hamilton-Satzes falsch?

$$p_A(x) = \det(A - xI_n) \Longrightarrow p_A(A) = \det(A - AI_n) = \det(A - A) = \det(0) = 0.$$

3. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und sei

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

(a) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $a_0 \neq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass für invertierbare $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt:

$$A^{-1} = \left(-\frac{1}{a_0}\right)\left((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n\right)$$

(c) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Finden Sie ein Polynom $p(x)$ mit $p(A) = A^{-1}$.

4. Finden Sie das Minimalpolynom der folgenden Matrizen:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) (2)

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Definition. *Ein Endomorphismus T ist eine* Projektion*, falls $T^2 = T$.*

Definition. *Eine Matrix A heisst* symmetrisch*, falls $A = A^T$.*

5. (a) Betrachten Sie $T \in \mathrm{End}(M_{n\times n}(\mathbb{R}))$, definiert durch $T(A) = A^T$. Finden Sie das Minimalpolynom von T und zeigen Sie, dass T diagonalisierbar ist. *Tipp:* $T^2 = \mathrm{Id}$.
   (b) Betrachten Sie eine Projektion $T \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie dass das Minimalpolynom M_T von T das Polynom $x^2 - x$ teilt und dass T diagonalisierbar ist.
   (c) Zeigen Sie, dass jede relle symmetrische Matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ diagonalisierbar ist.

Bemerkung: Es gilt sogar, dass jede relle symmetrische $n \times n$-Matrix diagonalisierbar ist.

Definition. *Ein Endomorphismus T von V heisst* nilpotent*, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $T^k = 0 \in \mathrm{End}(V)$.*

6. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und $n = \dim(V)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.
   (i) T ist nilpotent.
   (ii) $p_T(x) = \pm x^n$.
   (iii) Es gibt ein $1 \leq d \leq n$, so dass $T^d = 0$.
   (iv) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Tipp. *Für (i) $\Rightarrow$ (ii) verwenden Sie, dass das Ideal I_T vom Minimalpolynom generiert wird.*

7. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass der Schnitt von beliebigen T-invarianten Unterräumen von V auch ein T-invarianter Unterraum ist. (2)

8. Sei $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und $T(A) = A^T$. Finden Sie eine geordnete Basis für den T-zyklischen Unterraum $\mathrm{Zykl}(v) = \mathrm{Sp}\left\{T^i(v) \colon i \in \{0\} \cup \mathbb{N}\right\}$ für
   (a) $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) $v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. Sei A eine $n \times n$ Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\dim\left(\mathrm{Sp}\left(I_n, A, A^2, \ldots\right)\right) \leq n.$$

Tipp. *Verwenden Sie die Idee vom Beweis von Lemma 5.5.11(1) im Skript.*