Serie 4

Euklidische und unitäre Vektorräume
Abgabe 22.3.2021

Hinweis: In dieser Serie ist $\mathbb{F}$ jeweils $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V ist ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für die Übungen 2(b), 4, 7 und 8(b) können Sie Punkte bekommen. Aufgabe 8(c) ist aufwändig und soll nur gelöst werden, wenn man genug Zeit hat. Die Aufgaben 8(d) und (e) können hingegen unter Annahme von (c) ohne viel Aufwand gelöst werden.

1. Zeigen Sie, dass eine symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ positiv-definit ist, genau dann wenn $a > 0$ und $\det(A) > 0$.

   Hinweis: Quadratische Ergänzung.

2. Betrachten Sie das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $\langle v, w \rangle_A = v^T A w$ für $v, w \in \mathbb{R}^2$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Sei $||\cdot||$ die induzierte Norm.

   (a) Berechnen Sie $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$, $\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$ und $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_A$.

   (b) Finden Sie alle Vektoren, die orthogonal zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind und machen Sie eine Skizze. (2)

3. Wir betrachten den Vektorraum

$$V = C([0,1], \mathbb{C}) = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig und } f(0) = f(1)\}$$

   der stetigen zyklischen Funktionen und definieren

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

   für $f, g \in V$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist.

   (b) Für $n \in \mathbb{Z}$, sei $f_n(t) = e^{ni2\pi t}$. Zeigen Sie, dass für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\langle f_n, f_m \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad m = n \\ 0, & \text{falls} \quad m \neq n \end{cases}$$

   (c) Zeigen Sie, dass $\langle \sin(2\pi nt), \cos(2\pi nt) \rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

4. Sei $V = M_{n\times n}(\mathbb{F})$. Das Frobenius-Produkt auf V ist definiert durch (2)

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{Frob}} \colon V \times V &\to \mathbb{F} \\ (A, B) &\mapsto \langle A, B \rangle_{\text{Frob}} = \operatorname{spur}\left(A^T \overline{B}\right). \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{Frob}}$ ein Skalarprodukt auf $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ ist.

5. Sei V ein Euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt und induzierter Norm $||\cdot||$.

   (a) Sei $u, v \in V$ mit $||u|| = ||v||$. Zeigen Sie, dass $u + v$ orthogonal zu $u - v$ steht.

   (b) Zeigen Sie, dass die Diagonalen eines Rhombus senkrecht zueinander stehen.

6. (a) Zeigen Sie, dass in Euklidischen Vektorräumen V die Polarisationsgleichung gilt:
$$\forall v, w \in V \quad \langle v, w\rangle = \frac{1}{2}\left(||v+w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2\right).$$
(b) Zeigen Sie, dass in unitären Vektorräumen W gilt:
$$\forall v, w \in W \quad \langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(||v+w||^2 - ||v-w||^2 + i||v+iw||^2 - i||v-iw||^2\right).$$

7. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{F}^n$ und $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in \mathbb{F}^n$. Zeigen Sie, dass der verallgemeinerte Satz des Pythagoras gilt: (2)
$$||v||^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2.$$

8. Im Folgenden sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und bezeichne $\|\cdot\|$ die durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm auf V.
(a) Seien $v, w \in V$. Zeigen Sie, dass $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ genau dann gilt, wenn v und w zueinander orthogonal sind.
(b) Beweisen Sie, dass für alle $v, w \in V$ die *Parallelogrammgleichung* gilt: (2)
$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$
(c) Sei W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum versehen mit einer Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind: ($\star$)
1. Es existiert ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf W, welches $\|\cdot\|$ induziert.
2. Die Norm $\|\cdot\|$ erfüllt die Parallelogrammgleichung aus Teilaufgabe b.

Hinweis: Untersuchen Sie die Abbildung $W \times W \to \mathbb{R}$,
$$(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle := \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right).$$
i) $\forall\, w \in W : \langle 0, w\rangle = 0$.
ii) $\forall\, v_1, v_2, w \in W : \langle v_1+v_2, w\rangle + \langle v_1 - v_2, w\rangle = 2\langle v_1, w\rangle$.
iii) $\forall\, v_1, v_2, w \in W : \langle v_1+v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$.
iv) $\forall\, v, w \in W\, \forall\, n \in \mathbb{Z} : \langle nv, w\rangle = n\langle v, w\rangle$.
v) $\forall\, v, w \in W\, \forall\, n \in \mathbb{N} : n\langle \frac{1}{n}v, w\rangle = \langle v, w\rangle$.
vi) $\forall\, v, w \in W\, \forall\, r \in \mathbb{Q} : \langle rv, w\rangle = r\langle v, w\rangle$.
vii) $\forall\, v, w \in W : |\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$.
viii) $\forall\, v, w \in W\, \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \forall r \in \mathbb{Q}$:
$$|\lambda\langle v, w\rangle - \langle\lambda v, w\rangle| = |(\lambda - r)\langle v, w\rangle - \langle(\lambda - r)v, w\rangle| \leq 2|\lambda - r|\|v\|\|w\|.$$
ix) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist ein inneres Produkt und induziert $\|\cdot\|$.

(d) Die Manhattan-Norm (oder L_1-Norm) auf $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch
$$\begin{aligned} ||\cdot||_1 \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (v_1, v_2) &\mapsto |v_1| + |v_2|. \end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass $||\cdot||_1$ eine Norm-Funktion ist.
(e) Zeigen Sie, dass es kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ gibt, das die Manhattan-Norm induziert.

9. Sei V ein Vektorraum mit innerem Produkt und induzierter Norm $||\cdot||$. Sei $u, v \in V$ mit
$$||u|| = 5, \quad ||u+v|| = 8 \quad \text{und} \quad ||u-v|| = 6$$
Was ist $||v||$?