Serie 5

Gram-Schmidt und orthogonale Projektion
Abgabe 29.3.2021

Hinweis: Mit $\mathbb{F}$ ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gemeint. Punkte können Sie in den Aufgaben 3(a), 4(a) und 7 holen.

1. Sei V ein Euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie den Cosinussatz für $x, y \in V$ wobei φ der Winkel zwischen x und y ist.
$$||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\,||x|| \cdot ||y|| \cos(\varphi)$$

2. Sei $V = \mathbb{R}^3$ ein Euklidischer Vektorraum mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$, so dass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix in der Basis
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$
ist. Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, so dass T immer noch obere Dreiecksgestalt hat.

   Hinweis: Gram-Schmidt.

3. Betrachten Sie die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
   (a) In Aufgabe 1, Serie 3 haben Sie die Matrix A trigonalisiert. Finden Sie eine orthogonale Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass $[A]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Schreiben Sie die dazugehörige Schur-Zerlegung $O^T AO = R$ explizit hin. (2)
   (b) Finden Sie eine QR-Zerlegung.

4. Betrachten Sie das Skalarprodukt
$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$
auf $V = \mathbb{R}[x]_2$.
   (a) Wenden Sie den Gram-Schmidt-Algorithmus auf die Basis $\{1, x, x^2\}$ an, um eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[x]_2$ zu bekommen. (2)
   (b) Finden Sie ein Polynom $q \in \mathbb{R}[x]_2$, so dass
$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$
   für alle $p \in \mathbb{R}[x]_2$.
   (c) Finden Sie eine Basis des Dualraums $V^\star$.

5. Betrachten Sie den unendlichdimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ mit dem Skalarprodukt ($\star$)
$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Seien $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ die durch Anwenden des Gram–Schmidt Verfahrens auf die Basis $\{1, x, x^2, \ldots\}$ von $\mathbb{R}[x]$ gewonnenen Polynome. Zeigen Sie, dass

$$p_n = c_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dx}^n}(x^2-1)^n,$$

mit Konstanten $0 \neq c_n \in \mathbb{R}$ (Rodrigues Formel).

Bemerkung: Bis auf die Konstanten sind die so gewonnenen Polynome die Legendre Polynome, die in der MMP I Vorlesung noch eine wichtige Rolle spielen werden.

6. Seien $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ zwei Skalarprodukte auf einem $\mathbb{F}$-Vektorraum V, so dass $\langle v, w \rangle_1 = 0$ genau dann wenn $\langle v, w \rangle_2 = 0$ (für $v, w \in V$). Beweisen Sie, dass es eine positive Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\langle v, w \rangle_1 = c \langle v, w \rangle_2$ für alle $v, w \in V$.

7. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, so dass $[m_A]_{\mathcal{B}}$ diagonal ist. Beweisen Sie, dass A symmetrisch ist. (2)

8. Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ genau dann orthogonal ist wenn die *Zeilen*vektoren eine Orthonormalbasis bezüglich des üblichen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$ bilden.

   Hinweis: Bei einer orthogonalen Matrix bilden die *Spalten*vektoren eine Orthonormalbasis.

9. (a) Angenommen, U ist ein endlichdimensionaler Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass $U^\perp = \{0\}$ genau dann wenn $U = V$.
   (b) Finden Sie einen Vektorraum V mit Untervektorraum U, so dass $U^\perp = \{0\}$, aber $U \neq V$.

10. Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, U ein Unterraum und $P_U : V \to V$ die orthogonale Projektion auf U.
    (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Im}(P_U) = U$.
    (b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(P_U) = U^\perp$.
    (c) Sei $u \in U$, $w \in U^\perp$. Zeigen Sie, dass $P_U(u + w) = u$.
    (d) Zeigen Sie, dass $P_U^2 = P_U$ und dass alle Vektoren in $w \in \mathrm{Ker}(P_U)$ orthogonal zu allen Vektoren in U stehen.
    (e) Sei $P \in \mathrm{End}(V)$ so dass $P^2 = P$ und so dass jeder Vektor in $\mathrm{Ker}(P)$ orthogonal steht zu jedem Vektor in $\mathrm{Im}(P)$. Zeigen Sie, dass ein Unterraum $U \subseteq V$ existiert, so dass $P = P_U$.