Serie 6

Adjungierte, Spektralsätze
Abgabe 12. 4. 2021

Hinweis: In dieser Serie ist mit $\mathbb{F}$ immer $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gemeint und V ist ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. In den Aufgaben 2(b), 4 und 5(a) können Sie Punkte bekommen. Versuchen Sie in Aufgabe 4 eine saubere vollständige Induktion zu schreiben.

1. (a) Sei $U = \mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Finden Sie $u \in U$, so dass $\left\| u - \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\|$ minimiert wird.

   (b) Finden Sie ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]_3$, mit $p(0) = 0, p'(0) = 0$, so dass

$$\int_0^1 |2 + 3x - p(x)|^2 \,\mathrm{dx}$$

   minimal ist.

2. Wir betrachten $V = \mathbb{R}[x]_2$ mit Skalarprodukt $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{dx}$. Wir definieren $T \in \mathrm{End}(V)$ durch $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1x$.

   (a) Zeigen Sie, dass T nicht selbst-adjungiert ist.

   (b) Die Darstellungsmatrix von T bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ ist (2)

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

   Es gilt $[T]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B}^\star$, obwohl T nicht selbst-adjungiert ist. Warum ist das kein Widerspruch?

3. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass U T-invariant ist genau dann wenn $U^\perp$ $T^\star$-invariant ist.

4. In dieser Aufgabe verwenden wir vollständige Induktion über die Dimension n, um einen alternativen Beweis des Spektralsatzes über $\mathbb{C}$ für selbstadjungierte Endomorphismen zu geben: (2)

   Behauptung: *Ein selbstadjungierter Endomorphismus T in einem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum ist orthogonal diagonalisierbar.*

   - *Induktionsanfang:* Beweisen Sie die Behauptung für Vektorräume der Dimension 1.
   - *Induktionsannahme:* Sei nun $n > 1$. Wir nehmen an, dass die Behauptung für alle Vektorräume der Dimension $n-1$ gilt.
   - *Induktionsschritt:* Dann gilt die Behauptung auch für Vektorräume der Dimension n:
     - Finden Sie einen Eigenwert λ mit Eigenvektor v von T.
     - Zeigen Sie, dass $U = \mathrm{Sp}(v)$ invariant unter T ist.
     - Verwenden Sie Aufgabe 3 und $T = T^\star$ um zu zeigen, dass $U^\perp$ invariant unter T ist.
     - Zeigen Sie, dass $T|_{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$ selbstadjungiert ist.
     - Wenden Sie die Induktionsannahme auf $T|_{U^\perp}$ an, um eine Orthonormalbasis von V zu finden.

5. Für die folgenden Matrizen A finden Sie eine orthogonale Matrix Q, so dass Q^TAQ diagonal ist.

   (a) $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$ (2)

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

6. Für die folgenden Vektorräume V, W und linearen Transformationen $T\colon V \to W$, berechnen Sie $T^\star(v)$ für den gegebenen Vektor $v \in W$.

   (a) $V = W = \mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt, $T = m_A$, wobei
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und } v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   (b) $V = W = \mathbb{C}^2$ mit Standardskalarprodukt, $T = m_B$, wobei
   $$B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und } v = \begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}.$$

   (c) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}$, $T(x,y,z) = x - 2y + z$, $v = (5) \in \mathbb{R}^1$.

   (d) $V = W = \mathbb{R}[x]_2$ mit $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{dx}$, wobei $T(f) = f' + 3f$, und $v = 4 - 2x$.

7. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) $TT^\star$ ist selbstadjungiert.

   (b) $T + T^\star$ ist selbstadjungiert.

   (c) $T - T^\star$ ist selbstadjungiert.

8. Sei $V = W \oplus W^\perp$ und P_W die orthogonale Projektion auf W. Zeigen Sie, dass $P_W = P_W^\star$.