Serie 7

Adjungierte, Hauptachsentransformation und Repetition
Abgabe 19. 4. 2021

Hinweis: Aufgaben 1 und 3 sind Aufgaben über die Adjungierte und in Aufgabe 2 könnne sie die Hauptachsentransformation an einem Beispiel ausprobieren. Die Aufgaben 4, 5, 6 und 7 stammen aus früheren Prüfungen und behandeln den ganzen bisherigen Stoff aus der Linearen Algebra II. In den Aufgaben 2 und 6(d) können Sie Punkte bekommen.

1. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Sei $y, z \in V$ und $T(x) = \langle x, y \rangle z$ für $x \in V$. Zeigen Sie
   (a) Falls $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$ für alle $x \in V$, dann gilt $y = z$.
   (b) $T \colon V \to V$ ist linear.
   (c) Finden und beweisen Sie eine Formel für $T^\star$, die ähnlich zu $T(x) = \langle x, y \rangle z$ ist.

2. Betrachten Sie den Kegelschnitt in $\mathbb{R}^2$, der durch die Gleichung $x^2 + 2xy = 1$ gegeben ist. Finden Sie eine symmetrische Matrix A, so dass die Gleichung als $v^T A v = 1$ für $v^T = (x, y)$ geschrieben werden kann. Diagonalisieren Sie A orthogonal. Schreiben Sie eine Gleichung ohne gemischten Term xy in neuen Koordinaten $\tilde{x}, \tilde{y}$ hin, und bestimmen Sie, ob es sich um eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel handelt. (2)

3. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine positiv definite hermitesche Matrix. Wir betrachten das Skalarprodukt
$$(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle_A = v^T A \overline{w}$$
auf $V = \mathbb{C}^n$.
   (a) Zeigen Sie, dass jede positiv definite Matrix invertierbar ist.
   (b) Sei $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Für m_B schreiben wir die Adjungierte $(m_B)^\star = m_C$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$. Finden Sie C.
   (c) Geben Sie eine Bedingung an, die beschreibt ob m_B normal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ ist.
   (d) Was könnte die Bedingung sein, die beschreibt, dass m_B unitär bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ ist?

4. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine Matrix. Wir betrachten die Abbildung
$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_A \colon M_{n\times n}(\mathbb{C}) &\to M_{n\times n}(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto AX - XA \end{aligned}$$
   (a) Zeigen Sie, dass ad_A eine lineare Abbildung ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(ABC) = \mathrm{Spur}(BCA)$ für alle $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.
   (c) Zeigen Sie, dass die Adjungierte
$$\mathrm{ad}_A^\star = \mathrm{ad}_{\overline{A}^T}$$
   begzüglich dem Skalarprodukt $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Spur}(X\overline{Y}^T)$ erfüllt.

5. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
   (a) Sei $S \in \mathrm{End}(V)$, so dass $\langle Sv, v \rangle = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass $S = 0$ ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $T \in \mathrm{End}(V)$ genau dann selbstandjungiert ist, wenn die Adjungierte von T existiert und für alle $v \in V$ gilt
$$\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$$
   für alle $v \in V$.

6. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums V mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so dass es ein $n \geq 1$ gibt mit $T^n = \mathrm{Id}_V$ gilt.
   (a) Zeigen Sie, dass durch
   $$\langle\langle v, w\rangle\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \langle T^i(v), T^i(w)\rangle$$
   ein weiteres Skalarprodukt auf V definiert ist.
   (b) Welche Eigenschaft hat T bezüglich $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$? Folgern Sie daraus, dass T diagonalisierbar ist.
   (c) Zeigen Sie mit Hilfe des Minimalpolynoms, dass T diagonalisierbar ist.
   (d) Betrachten Sie den Fall $V = \mathbb{C}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Bestimmen Sie $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für den Endomorphismus $T = m_A$ für die Matrix (2)
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   und ein geeignetes $n \geq 1$.

7. Wir betrachten den Vektorraum $V_n = \mathbb{C}[x]_n$. Sei
   $$\langle f, g\rangle := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(k)\overline{g(k)}.$$
   (a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist.
   (b) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ für den Spezialfall $n = 2$ auf die Basis $\{1, x, x^2\}$ von V_2 an.
   (c) Welche Eigenschaft besitzt der Endomorphismus
   $$\varphi\colon f(x) \mapsto f(n-x)$$
   von V_n bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$? Folgern Sie daraus, dass φ diagonalisierbar ist.