Serie 8

Othogonale Abbildungen, Singulärwertzerlegung und Bilinearformen
Abgabe 26. 4. 2021

Hinweis: Die Aufgaben 1 und 2 behandeln orthogonale Abbildungen. Bei den Aufgaben 3 - 6 geht es um die Singulärwertzerlegung. Aufgabe 7 enthält Beispiele von Bilinearformen und in Aufgabe 8 kann man sehen, wie orthogonale Abbildungen für Bilinearformen verallgemeinert werden können. Mit $\mathbb{F}$ ist weiterhin $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gemeint und in den Aufgaben 1 - 6 ist V immer ein Vektorraum mit Skalarprodukt. In den Aufgaben 1, 4, 5(b) und 7(c) können Sie je zwei Punkte bekommen.

1. Seien $T_1, T_2 \in \operatorname{End}(\mathbb{F}^3)$ normal, so dass beide $2, 5$ und 7 als Eigenwerte haben. Zeigen Sie, dass es einen orthogonalen/unitären Endomorphismus $S \in \operatorname{End}(\mathbb{F}^3)$ gibt, so dass $T_1 = S^\star T_2 S$. (2)

2. Sei V der komplexe Vektorraum aller stetigen komplexen Funktionen auf $[0,1]$ mit dem Skalarprodukt
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$
Für $h \in V$ sei $T_h\colon V \to V$ durch $T_h(f) = hf$ definiert. Zeigen Sie, dass T_h eine unitäre Abbildung ist genau dann wenn $|h(t)| = 1$ für alle $t \in [0,1]$.

3. Finden Sie einen Endomorphismus $T \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^2)$, so dass 0 der einzige Eigenwert ist, T aber 0 und 5 als Singulärwerte hat.

4. Sei $T \in \operatorname{End}(V)$ und s ein Singulärwert von T. Zeigen Sie, dass es einen Vektor $v \in V$ gibt, so dass $\|v\| = 1$ und $\|Tv\| = s$. (2)

5. Finden Sie die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma\overline{V}^T$ von
   (a)
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$
   (b) (2)
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{C}).$$

6. Beweisen Sie die folgende Behauptung über $T \in \operatorname{End}(V)$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Satzes über die Singularwertzerlgeung:

   Behauptung: Die Eigenwerte von $TT^\star$ und $T^\star T$ sind gleich.

7. Entscheide für die folgenden Funktionen H, ob sie Bilinearformen sind:
   (a) Sei $V = C([0,1])$ der Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf dem Interval $[0,1]$. Für $f, g \in V$ definere
   $$H(f,g) := \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
   (b) Sei V ein $\mathbb{F}$-Vektorraum und J eine nichttriviale Bilinearform. Definiere
   $$H(x,y) = [J(x,y)]^2$$
   für $x, y \in V$.
   (c) Sei $H\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, H(t_1,t_2) = t_1 + 2t_2$. (2)
   (d) Sei $H\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (v,w) \mapsto \det(v,w)$, die Determinante der 2×2-Matrix mit v, w als Zeilen.

(e) Sei V ein Euklidischer Vektorraum und $H\colon V\times V\to\mathbb{R}$ definiert durch $H(x,y)=\langle x,y\rangle$ für $x,y\in V$.

(f) Sei V ein unitärer Vektorraum und $H\colon V\times V\to\mathbb{C}$ definiert durch $H(x,y)=\langle x,y\rangle$ für $x,y\in V$.

8. Wir betrachten Gruppen von Matrizen, die verschiedene Bilinearformen erhalten. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für $A\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, sei $B_A\colon \mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$ die Bilinearform definiert durch

$$B_A(v,w)=v^TAw \qquad \text{für alle } v,w\in V.$$

Für eine Bilinearform $B\colon \mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$ definieren wir

$$\mathrm{O}_B:=\mathrm{O}_B(n):=\{Q\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})\colon B(Qv,Qw)=B(v,w) \text{ für alle } v,w\in\mathbb{K}^n\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}_{B_A}(n)=\left\{Q\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})\colon Q^TAQ=A\right\}$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für $E,F\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ gilt: $\forall v,w\in\mathbb{K}^n\colon v^TEw=v^TFw \iff E=F$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}_{B_A}(n)$ mit Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

(c) Sei jetzt $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ und $A=I_n$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}_{B_{I_n}}(n)$ die Einheitssphäre

$$\mathbb{S}_{n-1}=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\colon x_1^2+\ldots+x_n^2=1\right\}$$

erhält, das heisst $\forall Q\in O_{B_{I_n}}(n)\colon Q(\mathbb{S}_{n-1})\subseteq\mathbb{S}_{n-1}$. Wie haben wir die Gruppe $\mathrm{O}_{B_{I_n}}(n)$ auch noch genannt?

(d) Sei $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Für $p,q\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit $p+q=n$ sei

$$I_{p,q}=\begin{pmatrix} I_p & 0\\ 0 & -I_q\end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $B_{I_{p,q}}$ eine symmetrische Bilinearform, aber kein Skalarprodukt ist.

(e) Sei $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $p=1,q=3,n=p+q=4$. Die Gruppe der Lorenz-Transformationen ist $\mathrm{O}_{I_{1,3}}(4)$ für $I_{1,3}$ wie in (d). Der Viererimpuls eines Teilchens in der speziellen Relativitätstheorie ist gegeben durch

$$v=\begin{pmatrix}E\\ p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E\\ p_1\\ p_2\\ p_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4.$$

Zeigen Sie, dass die Ruhemasse

$$m_0:=\sqrt{E^2-\|p\|^2}$$

(wobei $\|p\|=\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}$) invariant unter Lorenz-Transformationen ist.

(f) Für gerade $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$ ist die Gruppe der symplektischen Matrizen $\mathrm{Sp}(2k):=\mathrm{O}_\Omega(n)$ gegeben durch

$$\Omega=\begin{pmatrix}0 & I_k\\ -I_k & 0\end{pmatrix}.$$

Die Fläche eines Parallelograms, das durch die Vektoren $v_1,v_2\in\mathbb{R}^2$ aufgespannt wird ist $|\det(v_1,v_2)|$. Zeigen Sie, dass die Fläche von solchen Parallelogrammen von Elementen in $\mathrm{Sp}(2)$ erhalten bleibt.

(g) Zeigen Sie, dass für $n=2k>2$

$$\mathrm{Sp}(2k)\neq\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}):=\{Q\in M_{n\times n}(\mathbb{R})\colon \det(Q)=1\}.$$