Serie 9

Bilinearformen und quadratische Formen
Abgabe 3. 5. 2021

Hinweis: Falls nicht anderst spezifiziert, ist in dieser Serie V ein Vektorraum über einem beliebigen Körper K. Sie können Punkte in den Aufgaben 2, 3, 4(a) und 8(e) bekommen.

1. Sei $N = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{5} & \bar{6} \\ 0 & \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{1} & 0 & \bar{5} \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}_7)$. Finden Sie eine symmetrische Matrix A, so dass die induzierten quadratischen Formen $q_A = q_N$ übereinstimmen.

2. Betrachten Sie den Vektorraum $V = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ zusammen mit der geordneten Basis (2)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei $B\colon V \times V \to \mathbb{C}$ gegeben durch $B(A, B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$. Zeigen Sie, dass B bilinear ist und bestimmen sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(B)$.

3. Verwenden Sie das symmetrische Gauss-Verfahren (Skript 8.3.1) um für (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ein $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ zu finden, so dass $P^T AP$ eine Diagonalmatrix ist. Schreiben Sie auch die dabei entstehenden Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_n$ mit $E_n^T(\ldots(E_1^T AE_1)\ldots)E_n = P^T AP$ auf.

4. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis von V.
   (a) Zeigen Sie, dass es für jedes $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine Basis $\mathcal{C}$ von V gibt, so dass (2)

$$P = [\mathrm{Id}_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}.$$

   (b) Sei B eine Bilinearform und $T = M_{\mathcal{B}}(B)$. Sei $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $S = P^T TP$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{C}$ von V gibt, so dass $S = M_{\mathcal{C}}(B)$.

5. Sei B die Bilinearform $(x, y) \mapsto x^T Ay$ auf $\mathbb{R}^2$ für die symmetrische Matrix $A := \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Wir möchten eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$ finden, bezüglich welcher B eine Darstellungsmatrix der Form $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ hat.
   (a) Finden Sie so eine Basis mit Hilfe des Spektralsatzes und geeigneter Skalierung.
   (b) Finden Sie so eine Basis mit Hilfe des Satzes 8.3.3 für Bilinearformen über Körper der Charakteristik $\neq 2$ und geeigneter Skalierung.

6. Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$ Diagonalmatrizen mit den gleichen Diagonaleinträgen, aber möglicherweise in einer anderen Reihenfolge. Zeigen Sie, dass A und B kongruent sind.

7. Seien V und W zwei Vektorräume über einem Körper K. Eine Abbildung $B : V \times W \to K$ heisst Bilinearform, falls für jedes $v_1 \in V$ und $w_1 \in W$ die Abbildungen

$$\begin{aligned} &V \to K, v \mapsto B(v, w_1) \quad \text{(Linearität im 1. Argument)} \\ &W \to K, w \mapsto B(v_1, w) \quad \text{(Linearität im 2. Argument)} \end{aligned}$$

linear sind.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $V^* \times V \to K$, $(f, v) \mapsto f(v)$ eine Bilinearform ist.

(b) Definieren Sie eine Vektorraumstruktur auf der Menge der bilinearen Abbildungen $V \times W \to K$.

(c) Eine Bilinearform $B : V \times W \to K$ heisst *nicht ausgeartet*, wenn gilt

$$\forall v \in V \setminus \{0\} \; \exists w \in W : B(v, w) \neq 0,$$
$$\forall w \in W \setminus \{0\} \; \exists v \in V : B(v, w) \neq 0.$$

Zeigen Sie dass zwei endlichdimensionale Vektorräume V, W genau dann isomorph sind, wenn eine nicht ausgeartete Bilinearform $B : V \times W \to K$ existiert.

8. Sei K ein beliebiger Körper. Wir definieren die Relation $\sim$ auf K: Für $a, b \in K$ sei

$$a \sim b \iff \exists \alpha \in K^\times \text{ mit } a = b\alpha^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf K ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklasse von $0 \in K$ nur 0 enthält, also $[0]_\sim = \{0\}$.

(c) Zeigen Sie für $K = \mathbb{R}$, dass $\{0, 1, -1\}$ eine vollständige Menge von Repräsentanten bildet, indem Sie zeigen, dass $[1]_\sim = \{a \in \mathbb{R} \colon a > 0\}$ und $[-1]_\sim = \{a \in \mathbb{R} \colon a < 0\}$.

(d) Zeigen Sie für $K = \mathbb{C}$, dass $\{0, 1\}$ eine vollständige Menge von Repräsentanten bildet, indem Sie zeigen, dass $[1]_\sim = \mathbb{C}^\times$.

(e) Sei $K/\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung wohldefiniert ist: (2)

$$\begin{aligned} \det\colon \operatorname{Bil}(V) &\to K/\sim \\ B &\mapsto [\det M_{\mathcal{B}}(B)]_\sim, \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis von V ist.