Dr. Menny Akka Ginosar 23. August 2021

Prüfung in Lineare Algebra II

D-MATH, D-PHYS, D-CHAB

Bewertungsnummer: ________________

Hinweise zur Notation: Die Variablen m, n und k sind Elemente in $\mathbb{N}$. Mit V und W sind immer Vektorräume über einem Körper K gemeint. Machen Sie keine Annahme über die Dimension der Vektorräume, ausser wenn explizit angegeben. Mit $M_{m\times n}(K)$ sind die $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in K gemeint. Für eine lineare Abbildung $T\colon V \to W$ bezeichnet $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ die Darstellungsmatrix von T bezüglich der geordneten Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W. Für einen Endomorphismus T ist p_T das charakteristische Polynom und M_T das Minimalpolynom. Es gilt $K[x]_n = \{p \in K[x] \mid \deg(p) \leq n\}$.

1. **(28 Punkte)** Kreuzen Sie **auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen **wahr** oder **falsch** sind. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie **2 Punkte**, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten **nicht begründen**.

(1) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, aber nicht über $\mathbb{R}$.

(2) Sei B eine positiv definite, symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $B(v, v) \neq 0$.

(3) Sei V ein Euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Die orthogonale Projektion $p_U\colon V \to V$ auf den Untervektorraum U ist eine orthogonale Abbildung.

(4) $O(n)$ ist ein $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionaler Vektorraum.

(5) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $M_A(x) = x^2 + 2x + 3$. Dann ist A invertierbar.

(6) Jeder endlichdimensionale Vektorraum V kann als direkte Summe von eindimensionalen Vektorräumen geschrieben werden.

(7) Es gibt zwei nilpotente Matrizen $N_1, N_2 \in M_{6\times 6}(\mathbb{C})$, die nicht ähnlich zueinander sind und so, dass $M_{N_1}(x) = M_{N_2}(x) = x^4$ und $\dim \operatorname{Im} N_1 = \dim \operatorname{Im} N_2 = 4$.

(8) Sei T ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums. Sei $U \subseteq V$ ein T-invarianter Untervektorraum. Dann gibt es einen T-invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.

(9) Sei T ein selbstadjungierter Endomorphismus bezüglich eines endlichdimensionalen, unitären Vektorraum. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \neq 1$ ist $T - \lambda \operatorname{Id}$ invertierbar.

(10) Die Abbildung $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(-x)\,\mathrm{d}x$ ist ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum aller stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(11) Das Element $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$ ist ein reiner Tensor.

(12) Die Abbildung $\Phi\colon (M_{n\times n}(\mathbb{R}))^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\Phi(A, B, C) = \operatorname{Spur}(ABC)$ ist eine symmetrische Multilinearform.

(13) Sei V endlichdimensional. Wenn $\varphi, \psi \in V^\star$ linear unabhängig sind, dann gilt $\operatorname{Ker}(\varphi) \neq \operatorname{Ker}(\psi)$.

(14) Die Bilinearform $V^\star \times V \to K, (\varphi, v) \mapsto \varphi(v)$ ist nie ausgeartet.

Bitte wenden

Bewertungsnummer: ________________

2. (**16 Punkte**) Schreiben Sie Ihre Antworten jeweils in die dazugehörige Box. Sie können diese Fragen gerne zuerst auf einem anderen Blatt lösen und dann Ihr Endresultat übertragen. Beachten Sie aber, dass **nur** Ihr Endresultat in der Box bewertet wird. Pro Teilaufgabe sind **4 Punkte** erreichbar.

(a) Geben Sie eine Matrix A in Jordan-Normalform an, die über $\mathbb{R}$ ähnlich zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

$A =$

(b) Finden Sie das Produkt der Eigenwerte von

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & \sqrt{2}i & \sqrt{2}i \\ 4 & 5 & \sqrt{2}i & \sqrt{2}i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 =$

(c) Finden Sie die Signatur der quadratischen Form $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, q(x,y) = 4xy$.

$(r_+(q), r_-(q), r_0(q)) =$

(d) Betrachten Sie $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Finden Sie den Punkt $p \in \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, der den kleinsten Abstand zu $q = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in V$ hat.

$p =$

Bitte wenden

Bewertungsnummer: ________________

3. **(12 Punkte)** Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Pro Teilaufgabe sind **4 Punkte** erreichbar.

   (a) Es gibt $a_0, \ldots, a_{10} \in \mathbb{R}$, nicht alle gleich Null, so dass für jedes $p \in \mathbb{R}[x]_9$ gilt
   $$\sum_{n=0}^{10} a_n p(n) = 0.$$

   (b) Die lineare Abbildung
   $$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}[x] &\to \mathbb{R}[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned}$$
   hat genau einen Eigenwert.

   (c) Sei A eine unitäre Matrix, so dass $m_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (bis auf Vielfachheit) genau einen Eigenwert λ hat. Dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. **(12 Punkte)** (a) **(10 Punkte)** Zeigen Sie, dass
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}_5)$$
   über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_5$ diagonalisierbar ist. Geben Sie eine Diagonalmatrix $D \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}_5)$ an, die ähnlich zu A ist.

   (b) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie das Minimalpolynom M_A.

5. **(14 Punkte)** (a) **(2 Punkte)** Definieren Sie das *Minimalpolynom* M_A einer Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$.

   (b) **(6 Punkte)** Zeigen Sie, wenn λ ein Eigenwert von A ist, dann gilt $M_A(\lambda) = 0$.

   (c) **(6 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\deg M_A = \dim \operatorname{Sp}(I, A, A^2, \ldots)$.

6. **(10 Punkte)** (a) **(4 Punkte)** Seien V und W zwei K-Vektorräume. Forumulieren sie die *universelle Eigenschaft*, die das Tensorprodukt $V \otimes_K W$ erfüllt.

   (b) **(6 Punkte)** Sei $0 \neq v \in V$ und $0 \neq w \in W$. Zeigen Sie, dass $v \otimes_K w \neq 0$.

7. **(18 Punkte)** Für alle Teilaufgaben sei V ein endlichdimensionaler, unitärer Vektorraum.

   (a) **(2 Punkte)** Geben Sie die Definition einer *selbstadjungierten* Abbildung $T\colon V \to V$.

   (b) **(4 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer selbstadjungierten Abbildung reel sind.

   (c) **(6 Punkte)** Sei $T\colon V \to V$ selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass es Eigenwerte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ von T gibt, so dass für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt
   $$\lambda \leq \frac{\langle Tv, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \leq \mu.$$

   (d) **(6 Punkte)** Seien $T, S\colon V \to V$ selbstadjungiert. Sei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass $a \leq b$ und $c \leq d$. Zeigen Sie, dass wenn die Eigenwerte von T in $[a, b]$ liegen und die Eigenwerte von S in $[c, d]$ liegen, dass dann die Eigenwerte von $T + S$ in $[a + c, b + d]$ liegen.

   Hinweis: Verwenden Sie (c).