Dr. Menny Akka Ginosar 23. August 2021

Prüfung in Lineare Algebra II

D-MATH, D-PHYS, D-CHAB

Bewertungsnummer: ______________

Hinweise zur Notation: Die Variablen m, n und k sind Elemente in $\mathbb{N}$. Mit V und W sind immer Vektorräume über einem Körper K gemeint. Machen Sie keine Annahme über die Dimension der Vektorräume, ausser wenn explizit angegeben. Mit $M_{m\times n}(K)$ sind die $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in K gemeint. Für eine lineare Abbildung $T\colon V \to W$ bezeichnet $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ die Darstellungsmatrix von T bezüglich der geordneten Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W. Für einen Endomorphismus T ist p_T das charakteristische Polynom und M_T das Minimalpolynom. Es gilt $K[x]_n = \{p \in K[x] \mid \deg(p) \leq n\}$.

1. (**28 Punkte**) Kreuzen Sie **auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen **wahr** oder **falsch** sind. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie **2 Punkte**, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten **nicht begründen**.

   (1) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, aber nicht über $\mathbb{R}$.

   (2) Sei B eine positiv definite, symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $B(v,v) \neq 0$.

   (3) Sei V ein Euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Die orthogonale Projektion $p_U\colon V \to V$ auf den Untervektorraum U ist eine orthogonale Abbildung.

   (4) $O(n)$ ist ein $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionaler Vektorraum.

   (5) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $M_A(x) = x^2 + 2x + 3$. Dann ist A invertierbar.

   (6) Jeder endlichdimensionale Vektorraum V kann als direkte Summe von eindimensionalen Vektorräumen geschrieben werden.

   (7) Es gibt zwei nilpotente Matrizen $N_1, N_2 \in M_{6\times 6}(\mathbb{C})$, die nicht ähnlich zueinander sind und so, dass $M_{N_1}(x) = M_{N_2}(x) = x^4$ und $\dim \operatorname{Im} N_1 = \dim \operatorname{Im} N_2 = 4$.

   (8) Sei T ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums. Sei $U \subseteq V$ ein T-invarianter Untervektorraum. Dann gibt es einen T-invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.

   (9) Sei T ein selbstadjungierter Endomorphismus bezüglich eines endlichdimensionalen, unitären Vektorraum. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \neq 1$ ist $T - \lambda \operatorname{Id}$ invertierbar.

   (10) Die Abbildung $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(-x)\,\mathrm{d}x$ ist ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum aller stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (11) Das Element $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$ ist ein reiner Tensor.

   (12) Die Abbildung $\Phi\colon (M_{n\times n}(\mathbb{R}))^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\Phi(A,B,C) = \operatorname{Spur}(ABC)$ ist eine symmetrische Multilinearform.

   (13) Sei V endlichdimensional. Wenn $\varphi, \psi \in V^\star$ linear unabhängig sind, dann gilt $\operatorname{Ker}(\varphi) \neq \operatorname{Ker}(\psi)$.

   (14) Die Bilinearform $V^\star \times V \to K, (\varphi, v) \mapsto \varphi(v)$ ist nie ausgeartet.

   Lösung:

   Falsch, Wahr, Falsch, Falsch, Wahr, Wahr, Falsch, Falsch, Falsch, Falsch, Wahr, ~~Wahr~~, Wahr, Wahr
   FALSCH

Bitte wenden

Bewertungsnummer: ________________

2. **(16 Punkte)** Schreiben Sie Ihre Antworten jeweils in die dazugehörige Box. Sie können diese Fragen gerne zuerst auf einem anderen Blatt lösen und dann Ihr Endresultat übertragen. Beachten Sie aber, dass **nur** Ihr Endresultat in der Box bewertet wird. Pro Teilaufgabe sind **4 Punkte** erreichbar.

   (a) Geben Sie eine Matrix A in Jordan-Normalform an, die über $\mathbb{R}$ ähnlich zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

   Lösung:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Finden Sie das Produkt der Eigenwerte von

   $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & \sqrt{2}i & \sqrt{2}i \\ 4 & 5 & \sqrt{2}i & \sqrt{2}i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$

   Lösung:

   $$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = \det(A) = (10-12)(1-4) = 6$$

   (c) Finden Sie die Signatur der quadratischen Form $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, q(x,y) = 4xy$.

   Lösung:

   $$(r_+(q), r_-(q), r_0(q)) = \cancel{(1,0,1)} \quad (1,1,0)$$

   (d) Betrachten Sie $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Finden Sie den Punkt $p \in \operatorname{Sp}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, der den kleinsten Abstand zu $q = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in V$ hat.

   Lösung:

   $$p = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden

Bewertungsnummer: ________________

3. **(12 Punkte)** Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Pro Teilaufgabe sind **4 Punkte** erreichbar.

(a) Es gibt $a_0, \ldots, a_{10} \in \mathbb{R}$, nicht alle gleich Null, so dass für jedes $p \in \mathbb{R}[x]_9$ gilt

$$\sum_{n=0}^{10} a_n p(n) = 0.$$

(b) Die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{R}[x] &\to \mathbb{R}[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned}$$

hat genau einen Eigenwert.

(c) Sei A eine unitäre Matrix, so dass $m_A \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (bis auf Vielfachheit) genau einen Eigenwert λ hat. Dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Wahr. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R}[x]_9 &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \sum_{n=0}^{10} a_n p(n) \end{aligned}$$

ist eine lineare Abbildung, also ein Element des Dualraums. Für $n = 0, 1, \ldots, 10$ sind

$$\begin{aligned} \varphi_n \colon \mathbb{R}[x]_9 &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto p(n) \end{aligned}$$

ebenfalls Elemente des Dualraumes. Da $\dim V^\star = \dim V = \dim \mathbb{R}[x]_9 = 10 < 11$, ist die Menge $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{10}\}$ linear abhängig. Insbesondere ist sie NICHT linear unabhängig, das heisst es gibt $a_0, \ldots, a_{10} \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{n=0}^{10} a_n \varphi_n = 0.$$

(b) Wahr. Intuitiv betrachten wir die geordnete Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots\}$ von $\mathbb{R}[x]$. Dann bekommen wir die unendliche Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \cdots \\ 0 & 1 & \star & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

was uns vermuten lässt, dass nur die 1 ein Eigenwert sein kann. Wir beweisen dies nun rigoros:

Wir bemerken, dass konstante Polynome Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind. Somit hat T also mindestens einen Eigenwert. Wir zeigen, dass nur die 1 als Eigenwert in Frage kommt:

Sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ ein Eigenvektor von T (ein Polynom mit $a_n \neq 0$), das heisst $\lambda p(x) = p(x+1) = a_n (x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \ldots + a_0 = a_n x^n + (n \cdot a_n + a_{n-1}) x^n + \ldots + \tilde{a}_0$ und wenn wir den x^n-Term betrachten, bemerken wir, dass $\lambda a_n = a_n$, also $\lambda = 1$.

(c) Falsch. Wir betrachten die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass D unitär ist, $D\overline{D}^T = \mathrm{Id}$ und genau einen Eigenwert $\lambda = i$ hat. Aber λ ist nicht reell.

4. (**12 Punkte**) (a) (**10 Punkte**) Zeigen Sie, dass

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}_5)$$

über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_5$ diagonalisierbar ist. Geben Sie eine Diagonalmatrix $D \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}_5)$ an, die ähnlich zu A ist.

(b) (**2 Punkte**) Bestimmen Sie das Minimalpolynom M_A.

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom ist

$$p_A(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 3 = -(x-3)(x^2+1) = -(x-3)^2(x-2).$$

Das Polynom zerfällt in Linearfaktoren. Die Matrix ist diagonalisierbar genau dann wenn die geometrische gleich der algebraischen Vielfachheit ist. Wir berechnen die geometrische Vielfachheit von $\lambda = 3$. Man berechnet

$$\dim \mathrm{Eig}_3(A) = \dim \mathrm{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = 2$$

und somit ist die geometrische und die algebraische Vielfachheit von A gleich. Somit ist A diagonalisierbar. Fun Fact: Für

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

haben wir

$$P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = A$$

(b) Das Minimalpolynom einer diagonalisierbaren Matrix ist hat Exponent 1 für jeden Eigenwert. Somit gilt $M_A(x) = (x-2)(x-3)$.

5. (**14 Punkte**) (a) (**2 Punkte**) Definieren Sie das *Minimalpolynom* M_A einer Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$.

(b) (**6 Punkte**) Zeigen Sie, wenn λ ein Eigenwert von A ist, dann gilt $M_A(\lambda) = 0$.

(c) (**6 Punkte**) Zeigen Sie, dass $\deg M_A = \dim \mathrm{Sp}(I, A, A^2, \ldots)$.

Lösung:

(a) Sei $I_A = \{p \in K[x] \colon p(A) = 0\}$ das Ideal aller Polyome, die den Satz von Cayley-Hamilton erfüllen. Es gibt ein eindeutiges Polynom $M_A \in I_A$, dass alle Polynome von I_A teilt und Leitkoeffizient 1 hat. Dieses Polynom M_A heisst das Minimalpolynom von A.

Alternativ: Es ist das normierte Polynom M, mit $M(A) = 0$, und für alle $p(X) \in K[X] \setminus \{0\}$ mit $P(A) = 0$ gilt $\deg M \leq \deg P$.

(b) Sei $M_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ das Minimalpolynom. Sei λ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor v. Wir wissen, dass

$$M_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 \,\mathrm{Id} = 0 \in M_{n\times n}(K)$$

Also gilt

$$0 = M_A(A)(v) = \lambda^n v + a_{n-1}\lambda^{n-1}v + \ldots + a_1\lambda v + a_0 v = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)v = M_A(\lambda)v$$

und da $v \neq 0$, folgt $M_A(\lambda) = 0$.

(c) Sei $M_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Da $M_A \in I_A$ gilt $M_A(A) = 0$, was wir auch umschreiben können als

$$A^n = -(a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0).$$

Wir folgern, dass $\mathrm{Sp}(I, A, A^2, \ldots) = \mathrm{Sp}(I, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$. Wir haben also gezeigt, dass

$$\dim \mathrm{Sp}(I, A, A^2, \ldots) \leq n = \deg M_A$$

gilt. Die Ungleichung kann nur strikt sein, wenn die Elemente $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ linear abhängig sind, es also $b_0, \ldots, b_{n-1} \in K$ (nicht alle 0) gibt mit

$$b_0 I + b_1 A + \ldots + b_{n-1}A^{n-1} = 0$$

Somit haben wir ein Polynom $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \in I_A$ gefunden. Da aber M_A alle Polyonome in I_A teilt (also gelten muss $n = \deg M_A \leq \deg q = n - 1$) ist das ein Widerspruch. Wir folgern, dass die Ungleichung tatsächlich eine Gleichung ist.

6. (**10 Punkte**) (a) (**4 Punkte**) Seien V und W zwei K-Vektorräume. Forumulieren sie die *universelle Eigenschaft*, die das Tensorprodukt $V \otimes_K W$ erfüllt.

(b) (**6 Punkte**) Sei $0 \neq v \in V$ und $0 \neq w \in W$. Zeigen Sie, dass $v \otimes_K w \neq 0$.

Lösung:

(a) Das Tensorprodukt $(V \otimes_K W, \iota\colon V \times W \to V \otimes_K W)$ erfüllt folgende Eigenschaft:

Für jeden K-Vektorraum U und jede multilineare Abbildung $\varphi\colon V \times W \to U$ gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon V \otimes_K W \to U$, so dass das Diagram

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota"'] & & U \\ & V \otimes_K W \arrow[ur, "\exists!\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, i.e. $\overline{\varphi} \circ \iota = \varphi$.

(b) Sei $U = K$ und $f \in V\star, g \in W^\star$, so dass $f(v) \neq 0$ und $g(w) \neq 0$ (zum Beispiel kann man $\{v\}$ zu einer Basis von V ergänzen und das erste Element f aus der dualen Basis von $V^\star$ nehmen). Wir definieren die multilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon V \times W &\to K \\ (v, w) &\to f(v)g(w) \end{aligned}$$

Wir verwenden die universelle Eigenschaft um die lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon V \otimes_K W \to K$ zu bekommen. Für $v \neq 0 \in V$ und $w \neq 0 \in W$ haben wir $\varphi(v, w) = f(v)g(w) \neq 0$. Wenn $v \otimes_K w = \iota(v, w) = 0$ wäre, dann wäre wegen der Linearität auch $\overline{\varphi}(v \otimes_K w) = 0$, aber $\overline{\varphi}(v \otimes_K w) = \varphi(v, w) = f(v)g(w) \neq 0$.

7. (**18 Punkte**) Für alle Teilaufgaben sei V ein endlichdimensionaler, unitärer Vektorraum.

(a) (**2 Punkte**) Geben Sie die Definition einer *selbstadjungierten* Abbildung $T\colon V \to V$.

(b) (**4 Punkte**) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer selbstadjungierten Abbildung reel sind.

(c) **(6 Punkte)** Sei $T\colon V \to V$ selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass es Eigenwerte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ von T gibt, so dass für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt
$$\lambda \leq \frac{\langle Tv, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \leq \mu.$$

(d) **(6 Punkte)** Seien $T, S\colon V \to V$ selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass wenn die Eigenwerte von T in $[a, b]$ liegen und die Eigenwerte von S in $[c, d]$ liegen, dass dann die Eigenwerte von $T + S$ in $[a + c, b + d]$ liegen.
Hinweis: Verwenden Sie (c).

Lösung:

(a) Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt des unitären Vektorraums V. Da V endlichdimensional ist existiert die adjungierte Abbildung $T^\star\colon V \to V$ mit der Eigenschaft, dass für alle $v, w \in V$ gilt $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^\star w\rangle$. Der Endomorphismus wird selbstadjungiert genannt, wenn $T = T^\star$.

(b) Der Spektralsatz über $\mathbb{C}$ besagt, dass ein normaler Endomorphismus (also insbesondere ein selbstadjungierter) orthogonal diagonalisierbar ist. Sei $\mathcal{B}$ so eine Orthonormalbasis von V. Bezüglich so einer Basis hat ein selbstadjungierter Endomorphismus T eine Darstellungsmatrix $M = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ mit der Eigenschaft $M = \overline{M}^T$.

Beweis (nicht nötig): Es gilt $\langle v, w\rangle = v^T\overline{w}$ für $v, w \in \mathbb{C}^n$. Die Kondition $e_i^T M^T \overline{e_j} = \langle Me_i, e_j\rangle = \langle e_i, Me_j\rangle = e_i\overline{M}\overline{e_j}$ zeigt, dass $M^T = \overline{M}$, also $M = \overline{M}^T$.

Die Diagonaleinträge werden von der Transposition nicht angerührt, also gilt $M_{ii} = \overline{M_{ii}}$, also $M_{ii} \in \mathbb{R}$. Die Diagonaleinträge in einer Diagonalmatrix sind genau die Eigenwerte, also sind die Eigenwerte einer selbstadjungierter Abbildung reel.

(c) Da V endlichdimensional ist, hat T nur endlich viele Eigenwerte. Seien $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, die eine Orthonormalbasis bilden. Wegen (b) sind alle Eigenwerte in $\mathbb{R}$. Sei λ der kleinste Eigenwert und μ der grösste Eigenwert. Ein beliebiger Vektor $v \in V$ kann eindeutig geschrieben werden als $\sum_{i=1}^n a_i e_i$. Es gilt
$$\begin{aligned}
\langle Tv, v\rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i\overline{a_j}\langle Te_i, e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i\overline{a_j}\langle \lambda_i e_i, e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i |a_i|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^n \mu |a_i|^2 \\
&= \mu\langle v, v\rangle.
\end{aligned}$$

Somit gilt $\frac{\langle Tv,v\rangle}{\langle v,v\rangle} \leq \mu$ für alle $v \in V$. Analog zeigt man auch, dass $\frac{\langle Tv,v\rangle}{\langle v,v\rangle} \geq \lambda$.

(d) Sei λ ein Eigenwert von $T + S$ zum Eigenvektor v. Wir haben
$$\lambda = \frac{\langle \lambda v, v\rangle}{\langle v, v\rangle} = \frac{\langle (T+S)v, v\rangle}{\langle v, v\rangle} = \frac{\langle Tv, v\rangle}{\langle v, v\rangle} + \frac{\langle Sv, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

und somit folgt aus (c), dass
$$a + c \leq \lambda \leq b + d.$$