

MC-Fragen Serie 4

Einsendeschluss: 22.3.2021, 10:00

1. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und seien $u, v, w \in V$. Wenn $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$, dann ist $v = w$.

- (a) Richtig.
- (b) Falsch.

2. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und seien $u, v \in V$, sodass $\|u + v\| = 2$ und $\|u - v\| = \sqrt{8}$. Dann ist

- (a) $\langle u, v \rangle = -1$
- (b) $\langle u, v \rangle = 4$
- (c) $\langle u, v \rangle = -4$
- (d) $\langle u, v \rangle = \sqrt{2}$
- (e) $\langle u, v \rangle = 0$

3. Welche Bedingungen müssen an eine Matrix A gestellt werden, damit $(v, w) \mapsto v^T A w$ ein Skalarprodukt ist.

- (a) $A = A^T$
- (b) $\det(A) = 1$
- (c) A ist positiv definit
- (d) Alle Eigenwerte von A müssen gleich sein.

4. Aus welchen mathematischen Strukturen auf Vektorräumen kann man auf die Existenz anderer schliessen?

- (a) Eine Norm impliziert eine Metrik.
- (b) Eine Metrik impliziert ein Skalarprodukt.
- (c) Ein Skalarprodukt impliziert eine Norm.
- (d) Eine Norm impliziert ein Skalarprodukt.
- (e) Ein Skalarprodukt impliziert eine Metrik.
- (f) Eine Metrik impliziert eine Norm.

5. Welche der folgenden Vorschriften definieren innere Produkte auf den entsprechenden \mathbb{R} -Vektorräumen?

- (a) $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac - bd$ auf \mathbb{R}^2
- (b) $\langle A, B \rangle := \text{spur}(A + B)$ für $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (c) $\langle p, q \rangle := \int_0^1 p'(x)q(x)dx$ für $p, q \in \mathbb{R}[x]$, wobei p' die Polynomfunktion nach formaler Ableitung von p ist.
- (d) Keine der obigen Möglichkeiten

6. Seien $u, v \in V$ in einem Euklidischen Vektorraum V .

- (a) Es gilt $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$
- (b) Es gilt $\langle u, v \rangle \geq \|u\| \cdot \|v\|$
- (c) Falls u, v linear unabhängig sind, dann gilt $\langle u, v \rangle < \|u\| \cdot \|v\|$
- (d) Falls u, v linear unabhängig sind, dann gilt $\langle u, v \rangle > \|u\| \cdot \|v\|$
- (e) Falls u, v linear abhängig sind, dann gilt $\langle u, v \rangle < \|u\| \cdot \|v\|$
- (f) Falls u, v linear abhängig sind, dann gilt $\langle u, v \rangle > \|u\| \cdot \|v\|$

7. Der Winkel α zwischen zwei Vektoren $u, v \in V \setminus \{0\}$ ist gegeben durch

- (a) $\cos(\alpha) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$
- (b) $\cos(\alpha) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2 \cdot \|v\|^2}$
- (c) $\cos(\alpha) = \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle$

8. Sei $u, v, w, a, b \in V$ Elemente in einem unitären Vektorraum V .

- (a) $\langle 5v, w \rangle = \langle v, 5w \rangle$
- (b) $\langle \frac{1}{3}u + 2iv, w \rangle = \langle u, \frac{1}{3}w \rangle + 2i\langle v, w \rangle$
- (c) $i\langle u, v - w \rangle = \langle u, iw \rangle + \langle iu, v \rangle$
- (d) $\langle a, \langle u, v \rangle \cdot b \rangle = \langle v, u \rangle \cdot \langle a, b \rangle$

9. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und sei $T \in \text{End}(V)$. Dann besitzen T und T^* dieselben Eigenvektoren.

- (a) Richtig.
- (b) Falsch.

10. Sei $V = \mathbb{C}[x]_2$ ein unitärer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, das durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

in der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ gegeben ist.

- (a) \mathcal{B} ist eine Orthogonal-Basis.
- (b) \mathcal{B} ist eine Orthonormal-Basis.
- (c) $\langle x, 1 + x^2 \rangle = 1$.
- (d) $2 - x + 2ix^2$ ist orthogonal zu x .
- (e) Für alle $p, q \in \mathbb{C}[x]_2$ gilt $\langle p, q \rangle \in \mathbb{R}$.
- (f) Für alle $p, q \in \mathbb{C}[x]_2$ gilt $\langle p, q \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- (g) Für alle $p, q \in \mathbb{R}[x]_2 \subseteq \mathbb{C}[x]_2$ gilt $\langle p, q \rangle \in \mathbb{R}$.