Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 6

Einsendeschluss: 12.4.2021, 10:00

---

1. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, und sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Dann besitzen T und T^* dieselben Eigenvektoren.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Welche Aussagen stimmen?

(a) Eine Matrix über $\mathbb{R}$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn sie symmetrisch ist.

(b) Eine Matrix über $\mathbb{C}$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn sie hermitesch ist.

(c) Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume mit Skalarprodukt. Die adjungierte $T^\star$ von $T \colon W \to V$ kann durch die Gleichung

$$\langle v, Tw \rangle_V = \langle T^\star v, w \rangle_W \qquad \text{für } v \in V, w \in W$$

definiert werden.

3. Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Die Identität ist selbstadjungiert.

(b) Die Nullabbildung ist selbstadjungiert.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

4. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $T \in \operatorname{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann sind alle Eigenwerte von T in $\mathbb{R}$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

5. Welche Implikationen gelten für einen endlichdimensionalen Vektorraum mit Skalarprodukt V und $T \in \mathrm{End}(V)$?

(a) Für $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ gilt: T selbstadjungiert impliziert T normal.

(b) Für $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ gilt: T selbstadjungiert impliziert T normal.

(c) Für $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ gilt: T normal impliziert T selbstadjungiert.

(d) Für $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ gilt: T normal impliziert T selbstadjungiert.

(e) Für $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ gilt: T ist selbstadjungiert genau dann wenn T orthogonal diagonalisierbar ist.

(f) Für $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ gilt: T ist selbstadjungiert genau dann wenn T orthogonal diagonalisierbar ist.

(g) Für $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ gilt: T ist normal genau dann wenn T orthogonal diagonalisierbar ist.

(h) Für $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ gilt: T ist normal genau dann wenn T orthogonal diagonalisierbar ist.

6. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum V mit Skalarprodukt.

(a) Falls $TT^\star = \mathrm{Id}$, dann ist T diagonalisierbar.

(b) Falls $T = T^\star$, dann ist T diagonalisierbar.

(c) Falls $TT^\star = T^\star T$, dann ist T diagonalisierbar.

7. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ eine orthogonale Abbildung. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, dann ist $[T]_\mathcal{B}$ orthogonal

(a) Richtig.

(b) Falsch.

8. Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ orthogonal diagonalisierbar?

(a) Ja, über $\mathbb{R}$.

(b) Ja, über $\mathbb{C}$.

(c) Nein, weder noch.

9. Eine Isometrie auf einem Euklidischen Vektorraum ist eine Abbildung $T : V \to V$, sodass $\|Tv - Tw\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in V$ gilt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Jede Isometrie ist orthogonal.

(b) Jede orthogonale Abbildung ist eine Isometrie.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

10. Jede reelle symmetrische Matrix endlicher Ordnung $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ist eine Involution, d.h. $A^2 = I_n$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.