MC-Fragen Serie 7

Einsendeschluss: 19.4.2021, 10:00

---

1. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine symmetrische komplexe Matrix, also $A^T = A$. Was können Sie über die Eigenwerte von A aussagen?

(a) Alle Eigenwerte von A sind reel.

(b) Die nicht reellen Eigenwerte treten in konjugiert komplexen Paaren auf.

(c) Summe und Produkt der Eigenwerte müssen positiv sein.

(d) Nichts. Jedes n-Tupel $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ komplexer Zahlen kann als Eigenwerte einer solchen Matrix auftreten.

2. Wählen Sie alle Wörter an, die sich auf komplexe Skalarprodukträume beziehen (auch wenn sich ein Wort sowohl auf $\mathbb{R}$, als auch auf $\mathbb{C}$ bezieht). Überlegen sie sich auch welche Wörter zusammengehören.

(a) Euklidisch

(b) unitär

(c) orthogonal

(d) positiv definit

(e) symmetrisch

(f) hermitesch

(g) sesquilinear

(h) bilinear

(i) adjungiert

(j) selbstadjungiert

(k) normal

3. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

(a) Die Matrix A ist orthogonal diagonalisierbar.

(b) Der Endomorphismus m_A ist orthogonal diagonalisierbar bezüglich des Standardkalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

(c) Sei T ein Endomorphismus mit Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{B}} = A$ für eine Basis $\mathcal{B}$. Dann ist T orthogonal diagonalisierbar.

4. Gibt es ein $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, so dass T nicht selbstadjungiert (bezüglich Standardskalarprodukt) ist und es eine eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von T gibt.

(a) Ja

(b) Nein

5. Welche der folgenden Aussagen über die Adjungierte von $T\colon V \to W$ stimmen in allen endlichdimensionalen $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorräumen V, W.

(a) $\mathrm{Ker}(T^\star) = (\mathrm{Im}(T))^\perp$.

(b) $\mathrm{Im}(T^\star) = (\mathrm{Ker}(T))^\perp$.

(c) $\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T^\star) = \{0\}$.

6. Die folgenden Fragen stammen aus früheren Prüfungen und beziehen sich auf den ganzen Lineare Algebra II Stoff. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum.

(a) Jeder nilpotente diagonalisierbare Endomorphismus von V ist 0.

(b) Jeder nilpotente Endomorphismus von V ist diagonalisierbar.

(c) Es gibt einen nilpotenten Endomorphismus dessen charakteristisches Polynom durch $x + 1$ teilbar ist.

7. Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^n$ mit dem üblichen Skalarprodukt und $\mathcal{B}^\star = \{v_1^\star, \ldots, v_n^\star\}$ die duale Basis des Dualraums $V^\star$, definiert durch

$$v_i^\star(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $\Psi_\mathcal{B} \colon V \to V^\star$ die lineare Abbildung definiert durch $\Psi_\mathcal{B}(v_i) = v_i^\star$. Welche Aussagen sind wahr?

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine andere Basis von V. Dann gilt $\Psi_\mathcal{B} = \Psi_\mathcal{A}$.

(b) Für verschiedene Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt immer $\Psi_\mathcal{A} \neq \Psi_\mathcal{B}$.

(c) Falls $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Orthonormalbasen von V sind, dann gilt $\Psi_\mathcal{B} = \Psi_\mathcal{A}$.

8. Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums V. Welche der folgenden Aussagen gilt?

(a) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

(b) $U_1^\perp \cap U_2 = U_1 \cap U_2^\perp$.

(c) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

(d) $U_1 + U_1^\perp = U_2 + U_2^\perp$.

9. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, so dass $A^3 = A^2$. Dann gilt:

(a) $A = 0$.

(b) $A^2 = A$.

(c) $A = I_n$.

(d) $A^2 = I_n$.

10. Wie viele selbstadjungierte Endomorphismen gibt es in $\mathbb{R}^n$.

(a) 1

(b) 2^n

(c) 4^n

(d) ∞