MC-Fragen Serie 10

Einsendeschluss: 10.5.2021, 10:00

---

1. Alle positiv definiten symmetrischen reellen Matrizen sind kongruent.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Das Theorem von Sylvester besagt, dass solche Matrizen kongruent zu I_n sind.

2. Sei V ein Euklidischer Vektorraum.

√ (a) Wenn zwei symmetrische Matrizen die gleichen Eigenwerte haben, dann sind sie kongruent.

(b) Wenn zwei symmetrische Matrizen kongruent sind, dann haben sie die gleichen Eigenwerte.

(c) Keine der beiden Aussagen stimmt.

Symmetrische Matrizen sind orthogonal diagonalisierbar (Spektralsatz): Für orthogonale Matrizen Q gilt $Q^{-1} = Q^T$, deshalb ist ähnlich dasselbe wie kongruent.

3. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Verwenden Sie das Hauptminorenkriterium.

4. Positiv definite Matrizen haben keine Nullen auf den Diagonalen.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Falls der erste Diagonaleneintrag Null ist, dann können wir das Hauptminorenkriterium anwenden. Da die positiv-Definitheit nicht von der Basis abhängt, und wir durch umnummerieren immer eine Basis finden können in der der erste Diagonaleintrag Null ist, sind solche Matrizen nie positiv definit.

5. Sei q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^3$, so dass $q(1,1,0) = 2$ und $q(5,0,0) = 0$. Dann

$\checkmark$ (a) q könnte entartet sein.

(b) q ist positiv definit.

(c) q könnte negativ-semi-definit sein.

Negativ semi-definite quadratische Formen erfüllen $q(x,y,z) \leq 0$.

6. Die quadratische Form $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_1x_4 + 2x_2^2 - 6x_2x_4 + 3x_3^2 + 7x_4^2$ ist positiv definit.

$\checkmark$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Wir schreiben q als symmetrische Matrix und bemerken, dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \frac{3}{2} & -3 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot 3 \cdot 2 - (-3) \cdot (-3) \cdot 3 = 15 > 0.$$

7. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und $B \colon V^2 \to K$ eine Bilinearform. Wenn $B(v_i, v_i) > 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, dann ist B positiv definit.

(a) Wahr.

$\checkmark$ (b) Falsch.

Betrachten Sie das Beispiel $V = \mathbb{R}^2$, $B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2$, und die Basis $\mathcal{B} = \{(2,1), (3,1)\}$.

8. Sei $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{Q})$ mit der gleichen Signatur.

(a) Dann sind A, B kongruent über $\mathbb{Q}$.

$\checkmark$ (b) Dann sind A, B kongruent über $\mathbb{R}$.

$\checkmark$ (c) Dann sind A, B kongruent über $\mathbb{C}$

Da es kein $\alpha \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass $2 = \alpha^2 1$, sind 2 und 1 nicht äquivalent in $\mathbb{Q}$. Die Diagonalmatrizen I_n und $2I_n$ sind somit nicht kongruent. Der Satz von Sylvester besagt, dass die Kongruenzklassen über $\mathbb{R}$ durch die Signatur klassifiziert werden. Wenn es ein $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $P^T AP = B$ gibt, dann ist P auch schon in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und somit sind A und B über $\mathbb{C}$ kongruent.

9. Jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ist kongruent zu I_n.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die Aussage stimmt für nicht-degenerierte Matrizen.

10. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine reelle symmetrische Matrix, so dass es eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gibt mit $P^T P = A$.

√ (a) Dann gibt es eine symmetrische invertierbare Matrix S mit $S^T S = A$.

√ (b) Dann gibt es eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R mit $R^T R = A$.

√ (c) Dann ist A positiv definit.

Das sind alles äquivalente Aussagen, siehe Satz 8.5.11 im Skript.